

Exercice 7.4. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$;

(2) $g(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $g(0) = 0$.

(1) $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est une fonction polynomiale.
 $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ C^0 sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ C^0 sur $\mathbb{R}$.

Par produit, il vient que $x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ C^0 sur $\mathbb{R}^*$.

f C^0 sur $\mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ car } -1 \leq \cos x \leq 1$$

(2) $g(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, 0 si $x = 0$.

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x} \text{ } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \sin x \text{ } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^*, \quad g(x) \text{ } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^*.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \text{ Donc } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 7.5. Soient a, b, c des réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c, \\ ax + b & \text{si } x > c. \end{cases}$$

Étant donné b et c , trouver les valeurs de a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \sin(x) = \sin(c) \quad | \text{ faut que } \sin(c) = ac + b.$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} ax + b = ac + b \quad \Rightarrow a = \frac{\sin(c) - b}{c}.$$

$$f \text{ } C^0 \text{ pour } a = \frac{\sin(c) - b}{c} \text{ si } c \neq 0.$$

$$\text{si } c=0, \begin{cases} b=0 & C^0 \\ b \neq 0, & \times C^0 \end{cases}$$

b. On suppose $c \neq 0$, c fixe. Trouver a et b pour que f soit dérivable.

$$\text{Continue: } ac + b = \sin(c).$$

$$(ax+b)' = a. \quad \Leftrightarrow a = \cos(c).$$

$$(\sin(x))' = \cos(x).$$

$$\cos(c) \cdot c + b = \sin(c)$$

$$b = \sin(c) - \cos(c) \cdot c$$

Exercice 7.7. Soit $f(x) = e^{-1/|x|}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0. On donnera ce prolongement.

$$f(x) = e^{-1/|x|}$$

$$x \mapsto e^{-x} \quad C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+,$$

$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \quad (\text{continu}) \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \quad (\text{continu}) \end{cases}$$

$$-\frac{1}{|x|} \quad C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*, \text{ donc } -\frac{1}{|x|} \quad C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^*.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0. \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \text{ Donc } f \text{ est prolongeable par continuité}$$

$$\text{sur } \mathbb{R}. \text{ Donc } \tilde{f} = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 7.9. Soient f et g deux fonctions numériques sur $\mathbb{R}$. On appelle h la fonction définie par $h(x) = \max(f(x), g(x))$.

- (1) Montrer que $h(x) = \frac{1}{2} (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$.
- (2) Si f et g sont deux fonctions qui tendent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 en x_0 , quelle est la limite de h en x_0 ?
- (3) En déduire que h est continue sur $\mathbb{R}$ si f et g le sont.
- (4) L'inverse est-il vrai? Justifier votre réponse.

* Si: $f(x) > g(x)$, $f(x) - g(x) > 0$.

(1) $h(x) = \frac{1}{2} (f(x) + \cancel{g(x)} + f(x) - \cancel{g(x)}) = \frac{1}{2} 2f(x) = f(x)$,

* Si: $f(x) < g(x)$, $f(x) - g(x) < 0$,

$$h(x) = \frac{1}{2} (\cancel{f(x)} + g(x) - \cancel{f(x)} + g(x)) = g(x).$$

$\Rightarrow$ c'est bien $\max(f(x), g(x))$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \max(\ell_1, \ell_2)$.

(3). Si $f, g \in C^0$ sur $\mathbb{R}$, $f(x_0) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2} (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) = \frac{1}{2} (f(x_0) + g(x_0) + |f(x_0) - g(x_0)|) = h(x_0).$$

Donc $h \in C^0$ sur $\mathbb{R}$,

(4) Si $h \in C^0$, alors f et $g \in C^0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0) + g(x_0) + |f(x_0) - g(x_0)|).$$

Exercice 7.10. Soit $f(x) = x^5 - 3x - 1$, $g(x) = x2^x - 1$.

- (1) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution sur $[1, 2]$.
- (2) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution sur $[0, 1]$.
- (3) Montrer que $f(x) = g(x)$ admet une solution sur $]0, 2]$.

$$f(1) = 1 - 3 - 1 = -3, \quad f(2) = 32 - 7 = 25$$

(1) $f(1)f(2) < 0$, $f(x)$ C^∞ car c'est une f^∞ polynomiale.

Donc, $\exists \alpha \in]1, 2[$, $f(\alpha) = 0$. D'après le TVI.

$$(2) \quad g(0) = -1, \quad g(1) = 2 - 1 = 1.$$

$2^x = e^{x \ln 2}$ donc $2^x \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $x \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc $g \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists \beta \in [0, 1], \quad g(\beta) = 0.$$

$$(3), \quad f(x) - g(x) \Rightarrow x^5 - 3x - 1 = x2^x - 1$$

$$\Rightarrow x^5 - x(2^x + 3) = 0. \rightarrow \text{continue car produit et somme de } f^\infty \in C^\infty.$$

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

$$h(1) = 1 - 1(2 + 3) = -4.$$

$$h(2) = 32 - 2(4 + 3) = 18.$$

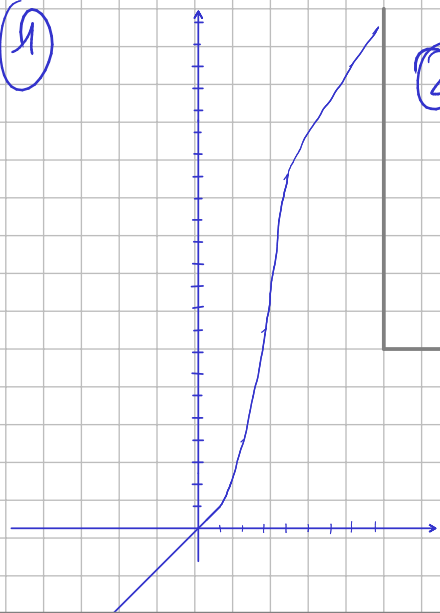
$h(1)h(2) < 0$ Donc $\exists \gamma \in]0, 2[$ tq $f(\gamma) = g(\gamma)$ car $[1, 2] \subset]0, 2]$.

Exercice 7.11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

- (1) Tracer le graphe de f .
- (2) f est-elle continue?
- (3) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même et déterminer sa réciproque f^{-1} .

①



② f semble continue.

f est continue par morceaux

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1, \quad \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 = 16, \quad \lim_{x \rightarrow 4} 8\sqrt{x} = 16, \quad \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 16.$$

Donc $f \in C^0$ sur $\mathbb{R}$.

③ $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x < 4, \\ (\frac{x}{8})^2, & x \geq 4. \end{cases}$

$$f_2 : [1; 4] \xrightarrow{x^2} [1; 16]$$

$$\xleftarrow{\sqrt{x}} \xleftarrow{8\sqrt{x}}$$

$$f_3 :]4; +\infty[\xrightarrow{(\frac{x}{8})^2}]16; +\infty[$$

Exercice 7.12. Soit f la fonction définie sur $I = [-2, -1[\cup \{0\} \cup]1, 2]$ par $f(x) = x + 1$ pour $x \in [-2, -1[$, 0 si $x = 0$, $f(x) = x - 1$ si $x \in]1, 2]$.

- (1) Montrer que f est continue sur I et bijective de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
- (2) Montrer que f^{-1} n'est pas continue sur J
- (3) Cela contredit-il le théorème de la bijection continue? Discuter.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-2; -1[\\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x \in]1; 2] \end{cases}$$

$f \in C^0$ sur $[-2; -1[\cup \{0\} \cup]1; 2]$ (car fct. polynomiales).

Donc C^0 sur I .

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1; 0[\\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x \in]0; 1]. \end{cases}$$

$$y = x + 1 \Rightarrow y - 1 = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1$$

Donc f^{-1} (pas continue sur $[-1; 1]$)

Non, car I n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 7.14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.

Indication : justifier d'abord qu'il existe $M > 0$ tel que $|x| > M \implies f(x) \geq f(0)$.

$$f \text{ est } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$\exists M > 0 \text{ tq } |x| > M \implies f(x) \geq f(0).$$

$$\forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tq si } x > B \implies f(x) > A.$$

$$\forall A > 0, \exists B' > 0 \text{ tq si } x < -B' \implies f(x) > A.$$

$$|x| > M \iff x > M \text{ ou } x < -M.$$

$$M = \max(M, M')$$

Exercice 7.13. (1) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) > 0$. En déduire qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq m$.

(2) Le résultat subsiste-t-il si on remplace $[0, 1]$ par $]0, 1[$?

(3) Si f et g sont continues sur $[0, 1]$ telles que $f(x) < g(x)$ sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) + \lambda < g(x)$.

Mézon.

Exercice 7.15.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Montrer qu'il existe au moins un point $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Montrer que c est unique si de plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

(1) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. $f \in C^0$,

Alors, $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, f(a)f(b) < 0$.

Donc d'après le TVI, $\exists \alpha \in]a; b[$ tq $f(\alpha) = 0$

Si f est $\nearrow$, elle est injective car tq, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

Donc si $a < b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

Alors, $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ tq $f(\alpha) = 0$.

ou inversement.

(2). Polynôme $P(x)$ degré impair $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$

On utilise (1) pour justifier que P admet au moins une racine réelle.

