

Exercice 7.15.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Montrer qu'il existe au moins un point $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Montrer que c est unique si de plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

(2). $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$. SPG, $a_{2n+1} > 0$, sinon on prend $-P$

$$P(x) = x^{2n+1} \left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty \quad \text{car } a_{2n+1} > 0.$$

$P(x)$ est un polynôme de $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer (1).

Exercice 7.16. Soient $n \geq 1$ et $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ une fonction polynomiale à coefficients réels de degré n .

Montrer que si $a_n a_0 < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

SPG, $a_n > 0$ et $a_0 < 0$.

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n \rightarrow +\infty$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n \Rightarrow a_n x^n \rightarrow -\infty, \exists b \in \mathbb{R}, f(b) > 0$$

$$f(b)f(0) < 0 \Rightarrow \text{TVI et finit.}$$

Exercice 7.18. Soit une fonction réelle $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

(1) Montrer que si f est continue, alors elle admet un point fixe, i.e. il existe un réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Indication : On pourra remarquer que $f(c) = c \iff c \text{ annule } f(x) - x$.

$$f(x) - x \quad f(x) \text{ est donc } f(x) - x \text{ est } C^0. \text{ On a } 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\text{Si } x=1, \text{ on a } f(x) \leq x \Rightarrow f(x) - x \leq 0$$

$$\text{Si } x=0, \text{ on a } x \leq f(x) \Rightarrow f(x) - x \geq 0.$$

$$f(x) - x \text{ est } C^0, \text{ donc d'après le TVI, } \exists c \in [0, 1], f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$$

Calculer $f'(2)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ par def.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{\cancel{2+h}-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(1) f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \mathcal{D}_f' = \mathcal{D}_f.$$

$$f'(x) = \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(6) f(x) = \sqrt{x - 2x^2},$$

$$x - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1 - 2x) \geq 0. \quad x \geq 0 \text{ et } 1 - 2x \geq 0 \text{ ou (1)}$$

$$x \leq 0 \text{ et } 1 - 2x \leq 0 \text{ (2).}$$

$$\left(\begin{array}{l} (1) x \geq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \geq x \Rightarrow \frac{1}{2} \geq x \geq 0 \\ (2) x \leq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \leq x \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim$$

$$f'(x) = \frac{1 - 4x}{2\sqrt{x - 2x^2}}$$

$$(10) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x} \right)' = \left(\frac{-1-x - (1-x)}{(1+x)^2} \right) = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{2(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

