

Thm de Rolle

$$f: [a; b] \mapsto \mathbb{R}, \quad f \in C^0[a; b], \quad f \in d^0]a; b[, \quad f(a) = f(b).$$

$$\text{Donc, } \exists c \in]a; b[\text{ tq } f'(c) = 0$$

TVI + Rolle

Thm des accroissements finis

$$f: [a; b] \mapsto \mathbb{R}, \quad f \in C^0[a; b], \quad f \in d^0]a; b[,$$

$$\text{Alors } \exists c \in]a; b[, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exercice 8.17. (Applications du théorème des accroissements finis).

- (1) Rappeler le théorème des accroissements finis.
- (2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $e^x > 1 + x$. A-t-on la même inégalité si $x < 0$?
- (3) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

$$f: [a; b] \mapsto \mathbb{R}, \quad f \in C^0[a; b], \quad f \in d^0]a; b[.$$

$$\Rightarrow \exists c \in]a; b[, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

$$(2)a. \quad \exp: [0; x] \mapsto \mathbb{R}, \quad C^0[0; x], \quad d^0]0; x[.$$

$$e^x - e^0 = (x - 0)e^c \Rightarrow e^x - 1 = e^c x \Rightarrow e^x = e^c x + 1, \quad c \in]0; x[.$$

$$e^x = e^c x + 1. \quad \text{On veut } e^x > x + 1.$$

$$\text{Comme } c \in]0; x[, \quad e^c > 1 \quad \text{Donc } e^c x > x \Rightarrow e^x = e^c x + 1 > x + 1.$$

$$(2b), \quad \exp: [x; 0] \mapsto \mathbb{R}, \quad C^0[x; 0], \quad d^0]x; 0[.$$

$$\exists c \in]x; 0[, \quad e^0 - e^x = (0 - x)e^c, \quad -e^x = -xe^c - e^0 \Rightarrow e^x = xe^c + 1.$$

$$\text{On a } e^c > 1 \Rightarrow xe^c > x \Rightarrow xe^c + 1 > x + 1 \Rightarrow e^x > x + 1.$$

(3) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

$$\sin: [y; x] \mapsto [-1; 1]. \quad (c \in]y; x[; d \in]y; x[.$$

$$\text{Alors, } \exists c \in]x; y[\text{ tq } |\sin(x) - \sin(y)| = |(x-y) \sin'(c)|$$

$$\Rightarrow |\sin x - \sin y| = |x-y| |\cos(c)|.$$

$$|\cos(c)| \leq 1 \Rightarrow |\cos(c)| |x-y| \leq |x-y| \Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

dérivée :

$$f(x) = \frac{e^{x^2} + 2}{x^3 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= f'(x) = \frac{2xe^{x^2}(x^3+1) - (e^{x^2}+2) \times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{e^{x^2}(2x^4+2x-3x^2)-6x^2}{(x^3+1)^2} \\ = \frac{e^{x^2}(2x^4-3x^2+2x)-6x^2}{(x^3+1)^2}.$$

$$f(x) = x^x = e^{x \ln(x)} \quad f'(x) = (e^{x \ln(x)})' = (x \ln(x))' e^{x \ln(x)} \\ = (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1) x^x$$

Exercice 8.15. Calculer la n -ième dérivée $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants :

(1) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(2) $f(x) = \sin x$

(3) $f(x) = \ln(1+x)$

(4) $f(x) = x e^x$

(5) $f(x) = \cos x$

(6) $f(x) = x \ln(1+x)$.

$$(1) f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} ; f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2 \times 3}{(1+x)^4} = \frac{2 \times 3}{(1+x)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \right) \text{ par récurrence}$$

Exercice 8.19. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Déterminer le domaine de dérivabilité de f .

(2) Montrer qu'il n'existe pas de $c \in]-1, 8[$ tel que $f'(c) = \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)}$.

(3) Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le TAF.

$$(1) x \mapsto \sqrt[3]{x^2} \quad d^0 \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$$

(2) On suppose que : $\exists c \in]-1; 8[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} = \frac{\sqrt[3]{64} - 1}{9} = \frac{4 - 1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Si } \exists c \in]-1; 8[, f'(c) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{c}} = 1$$

$$\text{Donc } \sqrt[3]{c} = 2 \Rightarrow c = 8.$$

Contradiction car $c \in]-1; 8[$. Donc faux.

(3). Aucune contradiction car $f \notin d^0]-1; 8[$.

$$(f(t); g(t)) \quad f, g: [a; b] \mapsto \mathbb{R}. \quad C^0 \text{ a } d^0]a; b[.$$

$$(f(a); g(a)) ; (f(b); g(b)).$$

Exercice 8.26. (Règle de l'Hôpital)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose de plus que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

- (1) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \neq g(b)$, et que pour tout $x \in]a, b[$, $g(x) \neq g(a)$.
- (2) Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $\phi(x) = f(x) - f(a) - m(g(x) - g(a))$ où $m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.
- (3) En déduire qu'il existe $c_{a,b} \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c_{a,b}) = (g(b) - g(a))f'(c_{a,b})$.
- (4) On suppose que $f(a) = g(a) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$(1). \forall x \in [a; b], g(x) \neq g(b) \quad g \text{ C}^1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = g(b), \\ g'(x) \neq 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \text{ ou } g'(x) < 0.$$

si $g(x) \in]a; b[$ et $d^\circ]a; b[$. $g(x) = g(b) \Rightarrow \exists c \in]x; b[\text{ tq } g'(c) \neq 0$
 Or $g'(x) \neq 0$ donc $g(x) \neq g(b) \quad \forall x \in [a; b]$.

Pareil pour $g(x) \neq g(a)$.

$$(2). \phi(x) = f(x) - f(a) - m(g(x) - g(a)), \quad g(b) - g(a) \neq 0 \text{ donc } m \text{ est définie.} \\ \phi \text{ C}^1 [a; b] \text{ et } d^\circ]a; b[. \text{ Donc } \exists c \in]a; b[\text{ tq } \phi'(c) = 0.$$

$$(3) \exists c_{a,b} \in]a; b[\text{ tq :}$$

$$\phi'(c_{a,b}) = f'(c_{a,b}) - m g'(c_{a,b}) = 0 \Rightarrow f'(c_{a,b}) = m g'(c_{a,b}) \\ \Rightarrow f'(c_{a,b}) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c_{a,b}) \Rightarrow f'(c_{a,b}) (g(b) - g(a)) = (f(b) - f(a)) g'(c_{a,b}).$$

Si $f(a) = g(a) = 0$, alors

$$f'(c_{a,b}) g(b) = f(b) g'(c_{a,b}) \Rightarrow \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c_{a,b})}{g'(c_{a,b})}.$$

Exercice 8.27. (1) En appliquant la règle de l'Hôpital (voir exercice ci-dessus) calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}.$$

(2) Retrouver, à l'aide de la règle de l'Hôpital, les limites étudiées dans l'exercice 6.11.

$$1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \frac{\frac{x^2}{2}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos^2 x = 0. \text{ ok}$$

Exercice 8.28. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que, pour tout réel b , il existe au plus un réel $x \in [-1, 1]$ tel que $x^3 - 3x + b = 0$.

$$f \text{ } \mathcal{C}^0[-1; 1], \text{ } \mathcal{D}^0]-1; 1[.$$

$$(-1)^3 + 3 + b = 0 \Rightarrow b + 2 = 0.$$

$$1^3 - 3 + b = 0 \Rightarrow b - 2 = 0.$$

$$f(-1) = f(1). \text{ Donc } \exists c \in]-1; 1[\text{ tq } f'(c) = 0$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 3 \Rightarrow c^2 = 1,$$

$$c = 1 \text{ ou } -1. \text{ } c \notin]-1; 1[.$$

Donc f s'annule au plus une fois.

Exercice 8.29. En étudiant la fonction $f(x) = x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$, démontrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

TVI.



