

TD28: Maths

Exercice 8.29. En étudiant la fonction $f(x) = x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$, démontrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 8.30.

- (1) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Montrer que si f s'annule en n points distincts avec $n \geq 2$, alors f' s'annule au moins $(n - 1)$ fois sur I .

Si f s'annule en n points distincts, $n \geq 2$, alors:

$$\exists g: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)g(x).$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad f(x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$[x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-1}; x_n]$. On applique Rolle sur ces intervalles.

Dans chaque intervalle I_j , $\exists c_j \in I_j$ tq $f'(c_j) = 0$. $\Rightarrow$ au moins $n-1$ fois

- (2) Soit P le polynôme $P(X) = X^n + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. Montrer que :

- si n est pair, alors P admet au plus deux racines réelles ;
- si n est impair et $p < 0$, alors P admet au plus trois racines réelles ;
- si n est impair et $p \geq 0$, alors P admet exactement une racine réelle.

1. $P'(X) = nX^{n-1} + p \Rightarrow X^{n-1} = -\frac{p}{n} \Rightarrow X = \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$ car $n-1$ impair.

2. $P'(X) = nX^{n-1} + p, p < 0 \Rightarrow X^{n-1} = -\frac{p}{n}$ a tout au plus deux solut^{ns}.
Donc P s'annule au plus 3 sol.

3. $P'(X) = nX^{n-1} + p, \Rightarrow X^{n-1} = -\frac{p}{n}$ au + n sol quand $p=0$, 0 sinon.
Donc P a au plus une racine.

$\lim_{X \rightarrow -\infty} P(X) = -\infty; \lim_{X \rightarrow +\infty} P(X) = +\infty$. Donc $\exists c \in]-\infty; +\infty[$ tq $P(c) = 0$.

Il y a donc exactement une solution.

Si $p=0$, $P(X) = X^n + q$.

