TD 3 Maths.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

$$\sum_{k=0}^{10} C_n^k 2^{k+2} = 4 \sum_{k=0}^{10} C_n^k 2^k = 4 \times 3^{10}.$$

$$\sum_{k=1}^{10} C_n^k 2^k = 3^{10} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{9} C_{10}^k 2^{k+3} = 8\left(\sum_{k=0}^{9} C_{10}^k 2^k + C_{10}^{10} 2^{10}\right) - 2^{13}$$

$$= 8(1+2)^{10} - 2^{10}.$$

$$\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \frac{2^{k+1}}{3^{k+5}} = \frac{2}{3^5}\left(1+\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

$$= \frac{2}{3^5}\left(\frac{5}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{2 \times 5^{10}}{3^{15}}$$

$$\sum_{k=2}^{8} C_8^k \frac{5^{k+2}}{3^{k-3}}$$

Exercice 1.11. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

En déduire la valeur de $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0^n = 0.$$

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} \qquad \text{Car} \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 0.$$

$$\text{et} \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Exercice 1.18. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = f(x)$,

$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$ On pose $x=1$.

$n \times 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$.

$A = [\![1;n]\!]$ $\quad |A| = n$

$B = [\![1;k]\!]$ $\quad |B| = k$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

$A' = \mathcal{P}(A), |\mathcal{P}(A)| = k = C_n^k$.

nombre d'applications $f : A \mapsto B$. k^n

nombre d'applications injectives $f : A \mapsto B$, $k \geq n$.

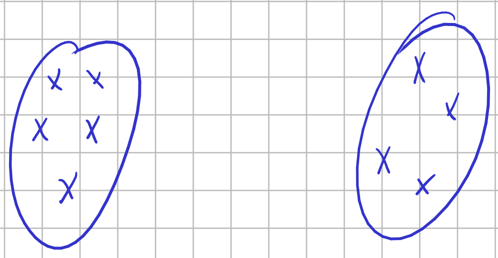
$k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{(n-k)!}$

nombre d'applications surjectives $f : A \mapsto B$, $k \leq n$.

Cas particulière : $k=4$, $n=5$.

$4 \cdot C_5^2 \cdot 3! = 240$.

Une image aura nécessairement deux antécédents



A $\qquad$ B.

À la maison. $K=4$, $n=6$.

Exercice 1.14. Soit $f : E \to F$. Montrer que

(1) $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

(2) f est surjective ssi $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

(3) f est injective ssi $\forall A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

$$f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$$

Soit $b \in f(f^{-1}(B))$

Mq $b \in B \cap f(E)$.

$b \in f(E)$ car $f(f^{-1}(B)) \subset E$.

f surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset F$.

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

On sait que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Or $f(E) = F$, Donc $B \cap F = B$. Alors, $f(f^{-1}(B)) = B$.

f injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E$

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

$$f^{-1}(f(A)) \subset A.$$

$x \in f^{-1}(f(A))$

$\exists y \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$

$x \in A$ car si $x \notin A$

$\exists a \in A$ tq $f(a) = f(x)$ et $a \neq x$.