TD 30 : Maths

Annales.

$$f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$$

① . $D_f = ?$ arcsin définie sur $[-1;1]$; arccos définie sur $[-1;1]$.

Donc $x \in [-1;1]$ et $[-1;1] \Rightarrow x \in [-1;1]$

② $f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$.

$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$f(1) = \arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in]-1;1[$.

③ . $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, Donc $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) = a$.

④ . $f(0) = \frac{\pi}{2}$, f est constante donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in [-1;1]$.
(car $f'(x) = 0$)

---

1. f définie, $C^0 I$, $d^0 I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$,
Alors : $\forall a;b \in I$, $\exists c \in]a;b[$, $a < b$. SPG,
$\Rightarrow (b-a) f'(c) = f(b) - f(a)$.

2. $f :]-1;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$
$t \longmapsto \ln(1+t)$.

a. Soit $x \in]-1;+\infty[$. Appliquer le TAF à f sur $[0;x]$ si $x > 0$ et sur $[x;0]$ si $x < 0$.

f définie $]-1;+\infty[$; $C^0]-1,+\infty[$, $d^0]-1;+\infty[$ (comp de fonct°)

Donc, $x > 0 \Rightarrow \exists c_1 \in [0;x]$, $\quad x f'(c_1) = f(x) - f(0)$

$x < 0 \Rightarrow \exists c_2 \in [x;0]$, $\quad f'(c_2) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = -\frac{f(x)}{-x}$

$\Rightarrow x f'(c_1) = f(x)$. si $x > 0$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1+c_1} x$ mais $\dfrac{1}{1+c_1} \leq 1$ $(c_1 \geq 0)$

Donc $f(x) \leq x$, si $x > 0$.

(pas fini)

$\Rightarrow -x f'(c_2) = -f(x)$ si $x < 0$

$= +x \dfrac{1}{1+c_2} = +f(x)$ $\dfrac{1}{1+c_2} > 1$ donc $x \leq f(x)$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. On sait que $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \underbrace{1}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}$$

TDG

$\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. x^3 d° $\mathbb{R}^*$ $-\dfrac{1}{x^2}$ d° $\mathbb{R}^*$, e^x d° $\mathbb{R}^*$. Par comp, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ d° $\mathbb{R}^*$.

Par produit, $x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}$ d° $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = 3x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} + \cancel{x^3} \left(\frac{2}{\cancel{x^3}} e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 3x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} + 2 e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} (3x^2 + 2).$$

② $f(x) = 0$ quand $x = 0$. Donc f d° $x = 0$ et $f'(0) = 0$.

③ f' C^0 0 si $\lim\limits_{x\to 0} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty \; ; \; \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty \,.\, \lim_{x\to 0^-} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$ Donc C^0 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x+1)(\sqrt{x^2+1})}{x^2+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \frac{x\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\frac{2\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{}}{-\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = 2$$ (Règle de l'Hopital).

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. On pose $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin(t)$ $\;-1 \leq \sin(t) \leq 1$

Donc $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin(t) = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ (sin borné)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\arctan(x)}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{\arctan(x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

$f:\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$f(2x)=f(x) \Rightarrow f$ constante.

On considère la suite $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$

$\forall x\in\mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(2\times\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Mq $e^x\sin(x)+\cos(x)=0$ a un nombre infini de solut°.

$\Rightarrow -\frac{1}{e^x} = \tan(x)$

$\tan : \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi\right\} \longmapsto \mathbb{R}$.

$\frac{1}{e^x} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$.

On se restreint sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$

tan st $\nearrow$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, et $-\frac{1}{e^x} \in]-\infty;+\infty[$.

Donc, $\exists! x_0 \in]-\infty;+\infty[$ tq $\tan(x_0) = -\frac{1}{e^x}$.

Comme tan est π-périodique sur $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}, \exists x_n \in]-\infty;+\infty[, \tan(x_n) = -\frac{1}{e^x}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \text{ ?}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{2-x}{3(x+1)} \right| < \frac{|2-x|}{6}.$$