TD31 : Maths.

Soit $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ ax^2-bx+1, & 1 \leqslant x < 2 \\ 2x+2a-b, & x \geqslant 2. \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

trouver a ~~et~~ b pour que f soit continue.

$f\ C^0$ en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} x+1 = \lim\limits_{x \to 1^+} ax^2 - bx + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} ax^2 - bx + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a-b=1}$

$f\ C^0$ en 2 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} ax^2 - bx + 1 = \lim\limits_{x \to 2^+} 2x + 2a - b.$

$\Rightarrow 4a - 2b + 1 = 2a - b + 4$

$\Rightarrow 2a = b + 3$ Mais $a = b + 1$

$= 2(b+1) = b+3$

$\Rightarrow 2b + 2 = b + 3$ Donc Donc $a = 2$

$\Rightarrow b = 1$

Donc f $C^0\mathbb{R}$ si $a=2$ et $b=1$.

2 $d^0\mathbb{R}$?

$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 1 \\ 2x-1 \text{ si } 1 \leqslant x < 2 \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} 2x - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1 = \lim\limits_{x \to 1^-} 1.$

$\lim\limits_{x \to 2^-} 2x - 1 = 4 - 1 = 3 \neq \lim\limits_{x \to 2^+} 2$. Donc $f \not d^0\mathbb{R}$,

2. $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x - 3.$

g d° $\mathbb{R}$ car c'est une fonct° polynômiale.

a) $g'(x) = x^2 - 3x - 4.$

b) points critiques : $g'(x) = 0 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25.$ $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$; $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{53}{6}$	$\searrow$	$-\frac{65}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty$

$g(-1) = \frac{-1}{3} - \frac{3}{2} - 4 - 3$

$= \frac{-2}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{11}{6} - \frac{42}{6} = -\frac{53}{6}.$

$g(4) = \frac{4^3}{3} - \frac{3 \times 16}{2} - 4 \times 4 - 3$

$= \frac{64}{3} - 24 - 16 - 3 = \frac{64}{3} - 43 = \frac{64}{3} - \frac{129}{3} = -\frac{65}{3}.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

d) g possède deux extrema locaux, en -1 et en 4.

. Ils ne sont pas globaux car g n'est pas borné.

⑥. $\forall x \in]-\infty; 4]$, $g(x) < 0$.

g C^0 $]4;+\infty[$, $s^t \nearrow$ $]4;+\infty[$, $\exists a,b \in]-4;+\infty[$, $g(a)g(b) < 0$.

Alors, d'après le TVI, $\exists \alpha \in]4;+\infty[$, $g(\alpha) = 0$.

et α est unique car g réalise une bij de $]4;+\infty[$ sur $]-\frac{65}{3};+\infty[$
d'après le th de la bijectᵒ.

$f(x) = \arcsin\left(\frac{|x-1|}{2}\right) - 1$.

① $\arcsin : [-1;1] \longmapsto [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. $\theta = \arcsin x = \begin{cases} \sin\theta = x \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$.

$|x-1| \leq 2 \Rightarrow -2+1 \leq x \leq 2+1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$.

②. On cherche x tq $-1 \leq \frac{|x-1|}{2} \leq 1$.

$-2 \leq |x+1| \leq 2 \Rightarrow x \in [-1;3]$

$-2 < 0 \leq |x+1| \leq 2 \Rightarrow |x+1| \leq 2$. car $|x| \geq 0$.

Donc $x \in [-1;3]$.

③ $D_f = [-1;3]$.

④. $f(0) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{6}{6} = \frac{\pi - 6}{6}$.

$f(1) = \arcsin(0) - 1 = 0 - 1 = -1$.

⑤ $f(x) = \frac{\pi - 4}{4} = \frac{\pi}{4} - 1 = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1$

$\frac{|x-1|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{2}$ $\quad$ $x - 1 = +\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{2} + 1$

ou $x - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} + 1 \in D_f$.

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ $\arctan(2x)+\arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}.$

$2x \in]-1;1[$ et $x \in]-1;1[$

$\Rightarrow x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$