

Examen blanc

Exercice 8.7. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (1) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour $x \neq 0$.
- (2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f et g en 0 et calculer $f'(0)$ et $g'(0)$ quand celles-ci existent.
- (3) Est-ce que la fonction f ou g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

$$\forall x \neq 0, f'(x) = + \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} x + x \sin(\frac{1}{x}) = x \left(\frac{\cos(\frac{1}{x}) + x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x^2} \right) = \frac{\cos(\frac{1}{x}) + x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x}$$

$$\forall x \neq 0, g'(x) = - \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} x^2 + 2x \sin(\frac{1}{x}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

$$f \text{ d}'0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{1}{x}) + x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ - parce que pour } 0^+ \text{ donc } f' \text{ existe en } 0 \text{ et } (-0)$$

cos et sin borné donc

$$f(=0), \text{ m'raisonnement pour } g. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(\frac{1}{h})}{h} \text{ n'existe pas.}$$

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

$$4x^3 \rightarrow 12x^2$$

$$-6x^2 \rightarrow -12x$$

Déterminer la multiplicité de 1.

$$P(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0.$$

$$P'(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0.$$

$$P''(1) = 12 - 12 + 4 \neq 0.$$

D'après le thm de Viète, 1 est une racine double de P

Donc $(x-1)^2$ divise P .

[illegible]

Donc $P(X) = (X-1)^2(X^2+1)$, $P \in \mathbb{R}[X]$.
 Irréductible sur $\mathbb{R}$ car $X^2 = -1$
 n'a aucune solution réelle.

les racines de X^2+1 sur $\mathbb{C}$ sont $-i$ et i

Donc $P(X) = (X-1)^2(X-i)(X+i)$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8.23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Etudier la convexité de $f(x) = (1+x)^n$, $x \in [-1, +\infty[$.
- (2) En déduire que pour tout $x \geq -1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} > 0 \text{ donc } C \vee x$$

$f_{\text{cux}} \Rightarrow$ les tangentes sont en dessous de C_f

$$T_n: f'(a)(x-a) + f(a) = n(1+a)^{n-1}(x-a) + (1+a)^n$$

$$T_0: y = nx + 1 = nx + 1$$

Comme f_{C^1} , on a $(1+x)^n \geq nx+1$.

Exercice 8.20. Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$.

(1) Déterminer les points critiques puis les extrema locaux de f .

Indication : on pourra utiliser l'exercice 7.14 pour justifier que f admet un minimum.

(2) Etudier la convexité de f .

(3) En déduire que f admet deux points d'inflexion et déterminer la tangente au graphe de f en ces points.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \quad f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(4x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{4},$$

$\hookrightarrow f \in C^1$ donc elle admet un minimum sur $\mathbb{R}$,

$$f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1).$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$		+	-	0	
f	CVX	CCV	CVX		

$$T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1$$

$$T_{\frac{1}{2}}: y = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} + \frac{15}{16} = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{16}.$$

$$(a_n)_{n \geq 0}, \quad 0 \leq a_n \leq 9$$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}; \quad v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} > 0. \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow.$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} - u_n - \frac{1}{10^n} = \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} \leq 0$$

$$u_n < u_n + \alpha \quad \forall \alpha > 0 \Rightarrow u_n < u_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow u_n < v_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_n - \frac{1}{10^n} = 0.$$

Donc, u_n et v_n sont adjacentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

$$u_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} = 1, \underbrace{111111\dots 1}_{n \text{ fois}}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}.$$

