

TDS: Maths.

- Exercice 2.4.** (1) Résoudre l'équation $|x - 1| = 3$ et les inéquations $|x - 1| > 3$, $|x - 1| < 3$ et $|x - 1| \leq 3$.
- (2) Si $f(x) = |1 + x| + |x - 1| - 3$, donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.
- (3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes où $m = 3$ ou 1 :
- (a) $|x + 1| + |x - 1| = m$, (b) $|x + 1| + |x - 1| \leq m$.
- (4) En utilisant une inégalité triangulaire, démontrer que $|x + 1| + |x - 1| \geq 2$ pour tout nombre réel x .
- (5) Interpréter le plus possible les résultats (1) - (4) ci-dessus en termes de la distance entre des points sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

$$|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$$

$$\begin{array}{l|l} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 & x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ |x - 1| = x - 1 = 3 & |x - 1| = -x + 1 = 3 \Rightarrow x = -2 \\ x = 4. & \end{array}$$

* $|x - 1| > 3$

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 & \text{Si } x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ |x - 1| = x - 1 > 3 & |x - 1| = -x + 1 > 3 \\ x > 4. & x < -2 \end{array}$$

Donc $S =]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[$.

* $|x - 1| < 3$.

La distance entre x et 1 est plus petite que 3 . Donc tous les nombres entre -2 et 4 exclus respectant la condition. Donc $S =]-2; 4[$.

$|x - 1| \leq 3$.

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 & \text{Si } x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ |x - 1| = x - 1 \leq 3 & |x - 1| = -x + 1 \leq 3 \\ x \leq 4. & x \geq -2 \end{array}$$

Donc $S = [-2; 4]$.

$$f(x) = |1+x| + |x-1| - 3.$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{si } -1 \leq x < 1, f(x) = -1 \\ \text{si } x > 1, f(x) = 2x - 3 \\ \text{si } x < -1, f(x) = -1 - x + -x + 1 - 3 = -2x - 3. \end{cases}$$

③ a) $|x+1| + |x-1| = m.$

$$\text{Si } x < -1 : |x+1| + |x-1| = -x-1 -x+1 = -2x = m \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}m.$$

$$\text{Si } x > 1 : |x+1| + |x-1| = 2x = m \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}m.$$

$$\text{Si } -1 \leq x \leq 1 : |x+1| + |x-1| = -x-1 + x-1 = -2 = m.$$

$$\text{si } m=1 \quad S = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \\ \emptyset & -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{si } m=3, \quad S = \begin{cases} -\frac{3}{2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x > 1 \\ \emptyset & \text{si } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

③ b) $|x+1| + |x-1| \leq m$

$$\text{Si } x < -1 : |x+1| + |x-1| = -x-1 -x+1 = -2x \leq m \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}m$$

$$\text{Si } x > 1 : |x+1| + |x-1| = 2x \leq m \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}m$$

$$\text{Si } -1 \leq x \leq 1 : |x+1| + |x-1| = -x-1 + x-1 = -2 \leq m$$

$$\text{si } m=1, \quad S = \begin{cases} [-\frac{1}{2}; +\infty[& \forall x < -1 \\]-\infty; \frac{1}{2}] & \forall x > 1 \\ \mathbb{R} & \text{pour } -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \text{si } m=3, \quad S = \begin{cases} [-\frac{3}{2}; +\infty[& \forall x < -1 \\]-\infty; \frac{3}{2}] & \forall x > 1 \\ \emptyset & \text{pour } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

④. Inégalité triangulaire: $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|.$

Démontrer $|x+1| + |x-1| \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$|x-z| = 2, \quad y=0$$

$$|x+1 - (x-1)| \leq |x+1| + |x-1|.$$

$$2 \leq |x+1| + |x-1|. \quad \text{OK.}$$

Exercice 2.5. (1) Si $f(x) = |x^2 - 1| - 2|x + 1|$, donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.

(2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x^2 - 1| - 2|x + 1| = 0$, (b) $|x^2 - 1| - 2|x + 1| \geq 1$.

①. $f(x) = |x^2 - 1| - 2|x + 1|$

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1$

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty[$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < -1. \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

②. si $x < -1$: $-x^2 + 2x + 3 = 0$. $\Delta = 16$ $S = \{-1; 3\}$	si $-1 \leq x \leq 1$. $x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 16$. $S = \{-1; 3\}$	si $x > 1$ $-x^2 - 2x - 1 = 0$ $\Delta < 0$ $S = \emptyset$.
--	--	--

③ si $x < -1$

$-x^2 + 2x + 3 \geq 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

tout pareil pour le reste.

$-x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta = 10$

$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} = -1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 2$	$-$	0	$+$	$-$

$x \in [x_2; x_1]$.

* $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lambda \Leftrightarrow$ pour tout intervalle ouvert qui contient λ , tous les éléments de la suite sauf peut-être un nombre fini sont dans l'intervalle.

* Une suite ne peut avoir qu'une seule limite

Preuve par l'absurde : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

On choisit $I_1 \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert tq $\lambda_1 \in I_1$ et $\lambda_2 \notin I_1$.

$\Rightarrow$ Comme λ_1 est une limite, tous les éléments de u_n sauf un nombre fini sont dans I_1 , donc λ_2 ne peut pas être une limite.