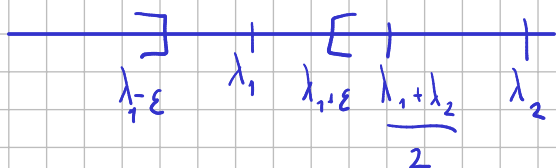


TD6: Maths

Si une suite converge, sa limite est unique.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$



Prenons $\varepsilon < \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2}$

$\exists N$ tq si $n \geq N$ alors $|u_n - \lambda_1| < \varepsilon < \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2}$. si $n \geq N$

$|u_n - \lambda_2| > \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2} \Rightarrow \lambda_2$ ne peut pas être une limite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante / S^+ croissante si :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante / S^+ décroissante si :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

* Théorème: Une suite croissante et majorée à une limite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \{u_0; u_1; u_2; \dots\} \subset \mathbb{R}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup(\{u_0; u_1; u_2; \dots\})$$

Exercice 2.11. (1) Montrer que les suites $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^3 - 1$ sont strictement croissantes.

(2) Montrer que la suite $u_n = -n^2 + n$ est strictement décroissante.

(1). $u_{n+1} > u_n, n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad (n+1)^2 + n + 1 - n^2 - n > 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 2 > 0 \Leftrightarrow 2(n+1) > 0 \Leftrightarrow n > -1.$$

vérai car $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^3 - 1 - n^3 + 1 > 0$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 > 0$$

$$3n(n+1) + 1 > 0. \text{ car } n \in \mathbb{N}. \text{ Donc vrai.}$$

Exercice 2.12. (1) Etudier la monotonie des suites définies ci-dessous :

(a) $u_n = \sqrt{n+3}$ (b) $u_n = 2^n - n$ (c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$

d) $u_n = \frac{n^2}{n-2}$ (e) $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$.

(a). $u_n = \sqrt{n+3}$ a priori croissante st.

$$u_{n+1} > u_n \quad \sqrt{n+4} - \sqrt{n+3} > 0. \Leftrightarrow \sqrt{n+4} > \sqrt{n+3} \text{ comme } n \geq 0,$$

$n+4 > n+3$ toujours vrai donc vrai.

(b) $u_n = 2^n - n$ a priori croissante.

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 2^{n+1} - n - 1 > 2^n - n$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 2^n - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^n > 1. \text{ vrai donc } u_n \text{ croissante.}$$

(c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$ on suppose croissante.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} > 1 \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} > 1 \Leftrightarrow \frac{2 \times 2^n \times n!}{(n+1)! \times 2^n} > 1$$

$$\Leftrightarrow n+1 \leq 2 \Leftrightarrow n \leq 1.$$

Vrai si $n \leq 1$, donc faux $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc elle n'est pas monotone.

Décroissante si $n \geq 1$.

(2) Démontrer que les suites suivantes sont bornées :

$$(a) u_n = \frac{1 + 3(-1)^n}{n} \quad (b) u_n = 5 \cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$$

$$(c) u_n = \frac{2 \sin^2(n) - 1}{2 - \cos(2n)} \quad (d) u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$(a) -2 \leq u_n \leq 2$$

$$(c) 0 \leq 2 \sin^2(n) - 1 \leq 1$$

$$1 \leq 2 - \cos(n) \leq 3$$

$$-1 \leq u_n \leq 1$$

$$(b) -5 \leq 5 \cos(n\pi) \leq 5$$

$$(d) \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2}$$