

TD7: Maths.

Exercice 2.15. Montrer, en utilisant la définition de la convergence d'une suite, que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, définie par $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$, converge vers $\frac{1}{2}$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \Rightarrow \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq u_n \leq \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \frac{n+1}{2n+1} \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \Leftrightarrow (2n+1) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \leq n+1 \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) (2n+1)$$

$$\Leftrightarrow n - 2n\varepsilon + \frac{1}{2} - \varepsilon \leq n \leq n + \frac{1}{2} + 2n\varepsilon + \varepsilon$$

$$n(1-2\varepsilon) + \frac{1}{2} - \varepsilon \leq n \leq n(1+2\varepsilon) + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\frac{1}{2} + \varepsilon \leq n - n(1-2\varepsilon)$$

$$-\frac{1}{2} + \varepsilon \leq 2n\varepsilon$$

$$\frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon}{2\varepsilon} \leq n = n_0 \quad n_0 = -\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} = \varepsilon + \frac{1}{2}$$

Exercice 2.23. En justifiant votre réponse, dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

- (1) Si une suite est croissante et minorée, alors elle est convergente.
- (2) Si une suite est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
- (3) Si une suite à termes positifs tend vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
- (4) Si une suite d'entiers converge, alors elle est stationnaire à partir d'un certain rang.
- (5) Si une suite prend un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire à partir d'un certain rang.
- (6) Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
- (7) Il existe une suite (u_n) divergente telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.

(7) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leftarrow$ diverge ? pas majorée donc ne converge pas.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - a_n = 0.$$

Exercice 2.13. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \ln(n+2) - \ln(n)$.

- (1) Trouver le plus entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq 10^{-3}$.
- (2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver le plus entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon$.
- (3) Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n \geq 0}$?

(1) $u_n = \ln(n+2) - \ln(n)$

$$\exists n_0 \text{ tq } n \geq n_0 \implies |u_n| \leq 10^{-3}$$

$$\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \leq 10^{-3} \text{ (car } \frac{n+2}{n} > 0)$$

$$\frac{n+2}{n} \leq e^{10^{-3}}$$

$$n+2 \leq n e^{10^{-3}}$$

$$n - n e^{10^{-3}} + 2 \leq 0$$

$$n(1 - e^{10^{-3}}) \leq -2 \iff n \geq \frac{2}{1 - e^{10^{-3}}} = n_0.$$

$$\downarrow$$
$$1 - e^{10^{-3}} > 0$$

$$1 > e^{10^{-3}}$$

$$0 > 10^{-3} \text{ faux donc } 1 - e^{10^{-3}} > 0.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \implies |u_n| < \varepsilon$

$$\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) < \varepsilon$$

$$\frac{n+2}{n} < e^\varepsilon \iff n(1 - e^\varepsilon) < -2 \iff n \geq \frac{2}{1 - e^\varepsilon} = n_0.$$

(3) Alors, la suite u_n converge vers 0.

Exercice 2.17. Trouver les limites des suites

(1) $u_n = \frac{2n-3}{5n+1}$ (2) $u_n = \frac{n^3+n^2-1}{5n^3+2n+1}$ (3) $u_n = n^3-2n^2$ (4) $u_n = \frac{\sin n}{n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{n^3+n^2-1}{5n^3+2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{5}$

(4) $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow$
 donc $\downarrow$
 0

(3) $u_n = \frac{n^3-2n^2}{1} = n^3(1-\frac{2}{n}) \rightarrow +\infty$

$\rightarrow$ à la maison.

Exercice 2.18. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si la suite (u_n) converge ou diverge. Déterminer sa limite dans le cas où elle converge.

(1) $u_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}$ (2) $u_n = 1 + (-1)^n$ (3) $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$

(4) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (5) $u_n = n^{(-1)^n}$ (6) $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$

(6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{n}}$. $\ln\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \ln(2)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(2) = 0$

$\ln(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 1$ donc $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$
 $n \rightarrow +\infty$

Exercice 2.19. Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - n^2)$ (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{(n^2 + 1)(n^2 - 1)}$ (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (2^n - 3^n)$

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n n}$

(7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ (8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \cos(n)}{3n + 1}$ (10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E\left(\frac{1}{n} - n\right)$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

(2.17. (1)).

$$u_n = \frac{2n-3}{5n+1} = \frac{n(2-\frac{3}{n})}{n(5+\frac{1}{n})} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5}.$$

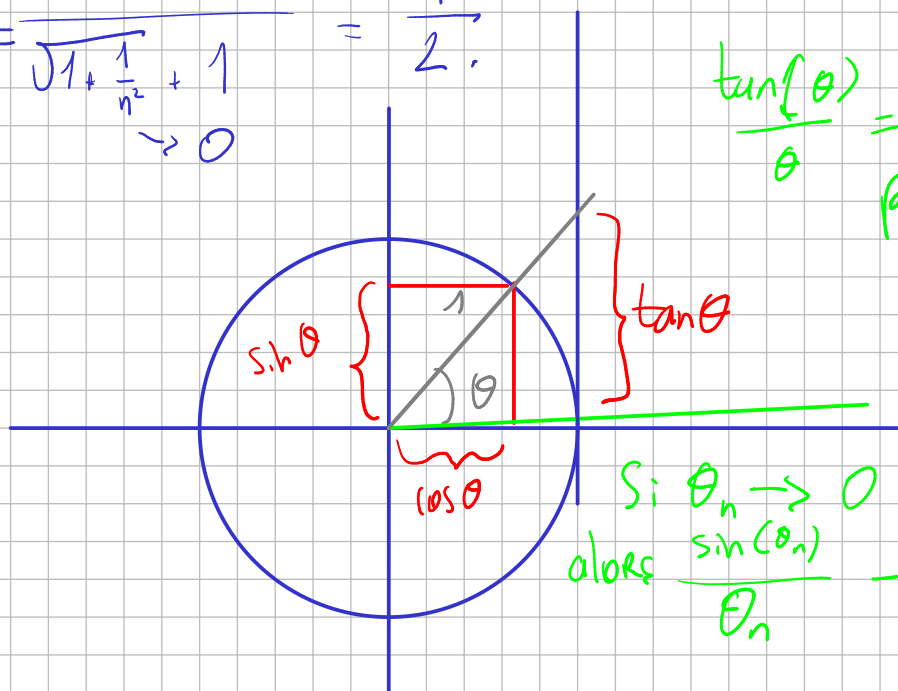
(2.19 (7,8,9)).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n) \times \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2+n - n^2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\frac{\tan(\theta)}{\theta} = 1$ quand θ est petit.



Si $\theta_n \rightarrow 0$
alors $\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \rightarrow 1$

$$(3n^2+n) \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \times \frac{n^2}{3n^2+n} = \frac{n^2}{3n^2+n} = \frac{n^2}{n^2(3+\frac{1}{n})} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\tan\left(\frac{5}{n}\right)} \right) = \frac{\frac{3}{n} \times \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}}}{\frac{5}{n} \times \frac{\tan\left(\frac{5}{n}\right)}{\frac{5}{n}}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Exercice 2.21. (1) Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ avec $|\ell| < 1$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(2) Que peut-on dire si $|\ell| = 1$ ou > 1 ?

(3) Étudier les suites suivantes selon la valeur de x :

$$(i) u_n = n x^n \quad (ii) u_n = \frac{x^n}{n^2} \quad (iii) u_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \begin{cases} |r| < 1 \\ r^n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |r| > 1 \\ r^n \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} |r| = 1 \\ r^n = 1 \end{cases} \quad (+1)^n \begin{cases} 1 \text{ n pair} \\ -1 \text{ n impair} \end{cases}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \quad |\ell| < 1. \quad \text{Mq } u_n \rightarrow 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \quad u_n > 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| < \varepsilon$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon \quad \ell + \varepsilon < 1$$

$$u_{n+1} \leq u_n (\ell + \varepsilon) \quad \varepsilon > 0$$

$$0 \leq u_{n+k} \leq u_n (\ell + \varepsilon)^k \rightarrow 0$$

Si $|\ell| = 1$, on ne peut rien dire
Si $\ell > 1$, la suite tend vers $+\infty$

(i) $u_n = n x^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} = x \quad \text{si } |x| < 1 \text{ alors } (u_n) \text{ converge}$$

(ii) $u_n = \frac{x^n}{n^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{\frac{(n+1)^2}{\frac{x^n}{n^2}}} = x \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \quad \text{si } |x| < 1 \text{ alors } (u_n) \text{ converge}$$

si $|x| > 1$ alors (u_n) diverge
On sait pas pour $|x| = 1$.

(iii) $u_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 \quad u_n \text{ converge} \\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.22. Soit (u_n) une suite réelle.

a) Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et ont même limite, alors (u_n) est convergente.