

TD8: Maths.

Exercice 2.22. Soit (u_n) une suite réelle.

a) Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et ont même limite, alors (u_n) est convergente.

b) En déduire que si (u_n) est une suite réelle telle que les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes, alors (u_n) est convergente.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, 2n \geq N_1 \Rightarrow |u_{2n} - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, 2n+1 \geq N_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - L| < \varepsilon$$

Si on prend $N = \max(N_1, N_2)$, alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, 2n \geq N \Rightarrow |u_{2n} - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, 2n+1 \geq N \Rightarrow |u_{2n+1} - L| < \varepsilon$$

$$2n+1 \geq N \text{ ou } 2n \geq N, \text{ donc } n \geq N \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Preuve Alternative :

Soit I un intervalle ouvert contenant L .

→ Comme (u_{2n}) converge vers L , ts les termes de (u_{2n}) sauf un nombre fini de termes sont dans I .

→ Comme (u_{2n+1})

⇒ comme le rang est soit pair soit impair, ts les termes sauf peut-être un nombre fini sont dans I .

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 \\ u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2 \\ u_{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_3 \end{array} \right| \rightarrow l_1 = l_2 = l_3 \text{ et } u_n \text{ converge.}$$

Si (u_n) converge vers l , toute sous-suite de (u_n) converge vers l .

La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et (u_{3n}) , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n} = l_1 = l_3.$$

La suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+3} = l_2 = l_3.$$

Donc $l_1 = l_2 = l_3$.

en vertu du a), (u_n) converge vers l_1 .

Exercice 2.25. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq a \leq b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence en posant $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (1) Montrer que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.
- (3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite (appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b).

On a $0 \leq a \leq b$.

① Initialisation. $n=0$.

$$u_0 = a \quad v_0 = b \Rightarrow 0 \leq a \leq b \text{ donc OK.}$$

② Hérité.

On suppose $0 \leq u_n \leq v_n$ vrai pour un n quelconque, montrons pour $n+1$.

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

$$0 \leq u_n v_n \leq v_n^2$$

$$0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq v_n \quad (\text{car } v_n \geq 0) \quad (\text{car } 0 \leq u_n \leq v_n)$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq v_n \quad (\text{faut voir la fin de la preuve, si } v_n \text{ croissante c'est ok})$$

u_n et v_n sont monotones: $\boxed{u_n \leq v_n}$

$$u_{n+1} \geq u_n$$

$$v_{n+1} \leq v_n$$

$$\sqrt{u_n v_n} \geq u_n$$

$$\frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} \leq 0 \Rightarrow u_n - v_n \leq 0$$

$$u_n v_n \geq u_n^2$$

$$\Rightarrow u_n \leq v_n \text{ vrai donc } v_n \searrow$$

$$u_n v_n \geq u_n u_n$$

$$\text{OK, } 0 \leq u_n \leq v_n$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_n v_n \leq v_n u_n !!$$

Donc vrai

$$u_0 = b \leq b$$

$$u_0 = a \leq b$$

$$u_1 = \sqrt{ab} \leq \sqrt{bb} = b$$

$$v_1 = \frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b$$

$u_n \leq b$ et $v_n \leq b$ par hypothèse

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{bb} = b$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b$$

$\rightarrow$ bornés donc converge.

$$u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \leq v_n$$

$$u_n \leq \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$$

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_n$$

$$\overline{u_n} \leq \overline{v_{n+1}} \leq \overline{v_n}$$

$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0 \text{ par le TDG.}$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

$$\text{Sinon. } u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

$$\sqrt{l_1 l_1} = \sqrt{l_1 l_2}$$

$$\sqrt{l_1} = \sqrt{l_2} \Rightarrow l_1 = l_2,$$