

**Exercice 2.24.** On souhaite étudier la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

sans rien savoir à priori sur l'exponentielle et le logarithme.

(1) Montrer que pour tout  $k \geq 3$ , on a  $\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3}$ .

(2) En déduire que

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+2}{2n} \cdots \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+2}{2n} \\ &< \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n-3} \cdots \frac{n+5}{n+3} \cdot \frac{n+4}{n+2} \cdot \frac{n+3}{n+1}. \end{aligned}$$

(3) En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$u_n < \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)},$$

puis que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est majorée par 4.

(4) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante si et seulement si, pour tout  $n \geq 2$ , on a

(I) 
$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

\*  $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \rightarrow 1$  Quand  $a_n$  tend vers 0.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad \underline{\underline{\text{DONC}}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

①  $\forall k \geq 3$ , on a  $\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3} \Leftrightarrow k(k-3) < (k-1)(k-2)$

$$\Leftrightarrow \cancel{k^2} - 3k < \cancel{k^2} - 2k - 1k + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 \quad \text{OK.}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n = \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+2}{2n} \cdots \frac{2n+2}{2n}.$$

$$\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3} \quad k=2n+2 \quad \parallel \quad \frac{2n+2}{2n} < \frac{2n+1}{2n-1}.$$

②. On applique l'inégalité de manière répétée

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-4} \cdots \frac{n+5}{n+3} \cdot \frac{n+4}{n+2} \cdot \frac{n+3}{n+1}$$

C'est un produit télescopique, tout se simplifie

sauf les deux premiers numérateurs

à revoir!

$$\text{Donc, } \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} < 4 \quad \forall n \geq 2$$

$$u_n \nearrow \Leftrightarrow \forall n \geq 2, 1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

On donne  $n := n+1$  d'un côté de l'autre:

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 ?$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{n - n + 1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

$$\text{Donc } \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1.$$

$$\text{Donc } \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n \leq 1 < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

