

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

Romann Szczepaniak

March 26, 2025

1 Suppositions

Faisons quelques suppositions pour l'ensemble du chapitre

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{i}, \vec{j})$

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2 Rappels

Voici quelques rappels importants

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}_2, \vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} \\ \vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}_3, \vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{v} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3 Projeté orthogonal d'un vecteur sur un autre

si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}_2, \vec{v} \neq \vec{0}$

Définition 1 (Projeté orthogonal). Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est l'unique vecteur noté $\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})$ tel que :

i. $\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{v}$

ii. $\vec{u} - \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \vec{v}$

Théorème 1. Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{P}_n$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors :

$$\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \times \vec{v}$$

Preuve

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda \vec{v} \implies \vec{u} - \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} - \lambda \vec{v}.$$

$$\vec{u} - \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \vec{v} \iff (\vec{u} - \lambda \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda \vec{v} \cdot \vec{v} = 0.$$

Comme $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda \|\vec{v}\|^2 \implies \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \implies \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \times \vec{v}.$$

Théorème 2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathcal{R}_n :$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

avec $\theta = \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

Preuve

1. $\theta = 0 \implies \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}, \lambda > 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \|\lambda \vec{v}\| \|\vec{v}\| \cos 0 = \lambda \|\vec{v}\|^2 \text{ car } \lambda > 0$$

2. $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$

On a $\vec{u} \perp \vec{v}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

D'autre part, on a $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = 0$ car $\cos \frac{\pi}{2} = \cos -\frac{\pi}{2} = 0$

3. $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$\text{On a } \cos(\theta) = \frac{\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\text{D'après le théorème 1, on sait que } \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Donc, } \|\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\implies \cos(\theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Puisque $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})$ sont dans le même sens donc $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

Donc, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$

4 Déterminant dans le plan

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}_2$, $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Le réel $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Théorème 3. Soient $\vec{v}, \vec{u}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace et notons $S_{\vec{u}, \vec{v}}$ le parallélogramme de côté $\vec{u}$ et $\vec{v}$

i. Aire $(S_{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\theta)|$ où $\theta = \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

ii. Dans le plan, Aire $(S_{\vec{u}, \vec{v}}) = |\det(\vec{u}, \vec{v})| = |\vec{u} \cdot \vec{v}^\perp|$

Preuve. Aire $(S_{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{base} \times \text{hauteur} = \|\vec{u}\| \|\vec{u} - \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})\|$

Aussi, $|\sin(\theta)| = \frac{\|\vec{u} - \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|}$, d'où,

Aire $(S_{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\theta)|$

□

5 Equation cartésienne d'une droite dans le plan

Si D une droite du plan passant par $A(\alpha, \beta)$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$$M(x, y) \in D \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0 \iff ax + by - (a\alpha + b\beta) = 0$$

Théorème 4. Toute droite du plan admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à la droite et un vecteur directeur est $\vec{n}^\perp \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

6 Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Soit P un plan de l'espace passant par $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$$M(x, y, z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0 \iff ax + by + cz - (a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0$$

7 Distance d'un point à une droite

$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \underbrace{\min(MN)}_{N \in \mathcal{D}} = MH$ Où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$

Théorème 5. Si $\mathcal{D}$ est la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ et dont une équation cartésienne est donnée par $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et si $M(x_m, y_m)$ est un point du plan, alors :

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_m + by_m + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve. Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

On a $\mathcal{P}_{\vec{n}}(\vec{u}) = \overrightarrow{HM}$. On sait que $\mathcal{P}_{\vec{n}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$

D'où : $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \|\mathcal{P}_{\vec{n}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

De plus, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_m - x_a \\ y_m - y_a \end{pmatrix}$

Comme $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$

$\vec{n}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_m - x_a \\ y_m - y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a(x_m - x_a) + b(y_m - y_a)$

$= ax_m + by_m - (ax_a + by_a)$. Donc $A \in \mathcal{D} \implies ax_a + by_a = -c$

D'où $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |ax_m + by_m + c|$

Donc, $\frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_m + by_m + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ □

8 Distance d'un point à un plan

$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$

Théorème 6. Avec les notations précédentes :

$$\text{dist}(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_m + by_m + cz_m + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

8.1 Produit vectoriel (dans l'espace)

Définition 2. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \neq \lambda \vec{v}$ On définit $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme l'unique vecteur tel que :

i. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

ii. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta)$ où $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

iii. La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe

Convention

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Remarques

- i. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- ii. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \text{Aire}(S_{\vec{u}, \vec{v}})$
- iii. si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est une base orthonormée directe, alors :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}.$$

iv. Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

- $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

Proposition 1. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Preuve. $\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \qquad \vec{v} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$$

$$= \underbrace{a_1 b_1 \vec{i} \wedge \vec{i}}_{=0} + \underbrace{a_1 b_2 \vec{i} \wedge \vec{j}}_{=\vec{k}} + \underbrace{a_1 b_3 \vec{i} \wedge \vec{k}}_{=-\vec{j}} \dots$$

□

Définition 3. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. on va appeler déterminant ou produit mixte le réel défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Interprétation géométrique

$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \text{volume du parallélépipède engendré par les vecteurs}$

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires (admis)}$

9 Equation cartésienne d'une droite dans l'espace

Théorème 7. L'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$(*) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

avec $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

Réciproquement, toute droite de l'espace admet une représentation de type $(*)$ qu'on appelle un système d'équation cartésiennes de $\mathcal{D}$

Preuve. Comme $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires, $\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$

De plus, les plans :

$$\begin{cases} \mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \\ \mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

ne sont pas parallèles ($\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, $\vec{n'}$ normal à $\mathcal{P}'$)

Donc, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$

Soit $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$

Montrons que $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est la droite passant par A est dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \begin{cases} ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d \\ a'x + b'y + c'z + d' = a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Alors } M \in \mathcal{P} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n'} = 0 \end{cases} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \wedge \vec{n'} \text{ colinéaires}$$

Donc, $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

□

10 Equations paramétriques

- Droite dans le plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $A(\alpha, \beta)$ et le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $M(x, y)$

Alors $M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \implies \text{équation cartésienne} \\ \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} x = ta + \alpha \\ y = tb + \beta \end{cases} &, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Droite dans l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par $A(\alpha, \beta, \gamma)$ dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors :

$$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

11 Plan dans l'espace

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace passant par $A(\alpha, \beta, \gamma)$ dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\vec{u} \neq \lambda \vec{u'}$

Alors :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u'} \text{ coplanaires} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u'}, t, t' \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + at + a't' \\ y = \beta + bt + b't' \\ z = \gamma + ct + c't' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 1 (Exemple de conversion paramétrique à cartésienne). Soit $\mathcal{P}$ le plan donné par le système d'équations paramétriques suivants :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + 2t + 3t' \\ y = 3 + t + t' \\ z = -5 - t + 2t' \end{cases}.$$

Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{P}$

Soit $A(1, 3, -5)$, $A \in \mathcal{P} (t = t' = 0)$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \text{ où } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, donc $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 3x - 3 - 7y + 21 - z - 5 = 0 \iff 3x - 7y - z + 13 = 0$$

12 Distance d'un point d'une droite dans l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite dans l'espace de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par A et soit M un point de l'espace

La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ s'intersectent en un point H qu'on appelle le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$

$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

$$\mathcal{A}(S_{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|$$

De plus, $\mathcal{A}(S_{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{v}\|MH$

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{v}\|MH \iff \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = MH$$

Théorème 8. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit M un point de l'espace. Alors :

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

13 Distance entre deux droite dans l'espace

Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace

Cas 1 : $\mathcal{D}_1$ parallèle à $\mathcal{D}_2$

On choisit $A_1 \in \mathcal{D}_1$. Donc $\text{dist}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \text{dist}(A_1, \mathcal{D}_2)$

Cas 2 : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes. Alors $\text{dist}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 0$

Cas 3 : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont ni parallèles ni sécantes.

Le point clé est la notion de perpendiculaire commune.

Proposition 2 (Perpendiculaire commune). Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles. Alors il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La droite Δ s'appelle la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

Définition 4. Si Δ et $\mathcal{D}_1$ sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_1$

On dit que Δ et $\mathcal{D}_1$ sont perpendiculaires si :

- $\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = 0$
- $\Delta \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset$

On choisit $A_1 \in \mathcal{D}_1$, $\vec{u}_1$ vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et on choisit $A_2 \in \mathcal{D}_2$, $\vec{u}_2$ vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$

Soit $\vec{u} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

On considère $\mathcal{P}_1$ passant par A_1 et dirigé par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}$

On considère $\mathcal{P}_2$ passant par A_2 et dirigé par $\vec{u}_2$ et $\vec{u}$

On pose ensuite $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ étaient parallèles, alors il existerait $\vec{n} \neq \vec{0}$

$\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

$\vec{n} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{n} \perp \vec{u}_2 \implies \vec{n}$ colinéaire à $\vec{u}$

$\implies \vec{n}$ colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{u}$

$\implies \vec{n} = \vec{0}$ (absurde)

Montrer que Δ est perpendiculaire à :

- $\mathcal{D}_1$: $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ vecteur directeur de $\vec{u}$
 $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$

De plus, Δ et $\mathcal{D}_1$ sont deux droites de $\mathcal{P}_1$ et comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes

$\rightarrow$ On est ramenés à calculer $H_1 H_2$ où

$$\{H_1\} = \Delta \cap \mathcal{D}_1$$

$$\{H_2\} = \Delta \cap \mathcal{D}_2$$

$$\det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \det(\overrightarrow{A_1 H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

$$= (\overrightarrow{A_1 H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 A_2}) \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$$

$$= \overrightarrow{A_1 H_1} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) + \overrightarrow{H_1 H_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) + \overrightarrow{H_2 A_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$$

$$\implies \det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \overrightarrow{H_1 H_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = \|\overrightarrow{H_1 H_2}\| \|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\| \cos(\theta)$$

$$\text{où } \theta = \left(\overrightarrow{H_1 H_2}, \widehat{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2} \right)$$

Or, $\overrightarrow{H_1 H_2}$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ sont colinéaires, Donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi \pmod{2\pi}$

D'où $|\cos(\theta)| = 1$

$$\implies \left| \det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = H_1 H_2 \times \|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|$$

$$\implies H_1 H_2 = \frac{\left| \det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \right|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}.$$

Théorème 9. Soit $\mathcal{D}_1$ une droite passant par A_1 dirigée par $\vec{u}_1$ et $\mathcal{D}_2$ une droite passant par A_2 et dirigée par $\vec{u}_2$. Alors :

$$\text{dist}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}.$$