

Chapitre 2 : Systèmes linéaires

Romann Szczepaniak

April 28, 2025

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de résoudre un système linéaire à p équations et n inconnues

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ \vdots \quad \ddots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases}$$

Les a_{ij} et les b_{ij} sont des réels donnés tel que :

$$1 \leq a_{ij} < p, \quad 1 \leq b_{ij} < p$$

Une solution de (S) est un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui vérifie les p équations de (S)

Exemple

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ est une solution de (S) mais pas $(-1, 1, 0)$

2 Méthode du pivot de Gauss

Idée

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \ddots \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases}$$

Par des opérations élémentaires, on va se ramener à un système équivalent triangulaire avec $a'_{ij} = 0, j > i$

2.1 Opérations élémentaires

- i. échange de L_i et L_j
- ii. remplacement d'une ligne L_i par $\lambda L_i + \mu L_j$ où $i \neq j, \lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{R}$

On peut appliquer à un système (S) une des ces deux opérations élémentaires tout en gardant un système équivalent

Exemple 1

Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} y - 3z = -1 \\ x + z = -2 \\ 2x - 2y + 5z = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1x + z = -2 \\ y - 3z = -1 \\ 2x - 2y + 5z = -5 \end{cases}$$

La première étape consiste à éliminer l'inconnue x dans la deuxième et troisième équation en utilisant la deuxième opération élémentaire

$$(S_1) \begin{cases} x + z = -2 \\ y - 3z = -1 \quad (2L_1 - L_2) \\ 2x - 2y + 5z = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = -2 \\ y - 3z = -1 \quad (2L_1 - L_2) \\ 2y - 3z = 1 \quad (2L_1 - L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = -2 \\ y - 3z = -1 \\ 3z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = -3 \\ y = -1 + 3z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Le système a une unique solution donnée par $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$

Exemple 2

$$(S_2) \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3y - 3z = 2 \quad (L_1 - L_2) \\ -y + z = 3 \quad (L_1 - L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3y - 3z = 2 \\ 0 = 11 \quad (L_2 + 3L_3) \end{cases}$$

Comme $0 \neq 11$, le système (S) n'admet aucune solution

Exemple 3

$$\begin{aligned}(S_3) & \begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ z + 2y - 3z = \frac{11}{3} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3y - 3z = 2 \quad (L_1 - L_2) \\ -y + z = 3 - \frac{11}{3} = -\frac{2}{3} \quad (L_1 - L_3) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3y - 3z = 2 \\ 0 = 0 \quad (3L_3 + L_2) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

z est donc un paramètre libre. On peut prendre $z = t, \forall t \in \mathbb{R}$

Exemple 4

Résoudre (S_4) selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(S_4) & \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2x + 4y - 6z - 2t = 0 \\ -x + y - 3z - 9t = -2 \\ x - 2y + 5z + 13t = m + 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2y - 4z - 6t = -2 \quad (-2L_1 + L_2) \\ -2y - 4z - 7t = -1 \quad (L_1 - L_3) \\ 3y - 6z - 11t = -m - 3 \quad (L_1 - L_4) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2y - 4z - 6t = -2 \\ t = -1 \quad (L_2 - L_3) \\ 4t = -6 + 2m \quad (2L_2 - 2L_4) \end{cases} \\ & \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2y - 4z - 6t = -2 \\ t = -1 \\ 0 = -4 - 2m \quad (4L_3 - L_4) \end{cases}\end{aligned}$$

(S_4) a une solution $\iff -2m - 4 = 0 \iff m = -2$

Si $m = -2$:

$$(S_4) \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2y - 4z - 6t = -2 \\ t = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2y - 4z - 6t = -2 \\ z = st = -1 \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = -s + 7 \\ y = 2s - 4 \\ z = s \\ t = -1 \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Si $m \neq -2$, le système (S_4) n'a pas de solution

3 Lien entre le système linéaire et le déterminant

Supposons que (S) soit un système linéaire à deux équations et deux inconnues, *i.e*

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{avec } (a_1, b_1) \neq (0, 0), (a_2, b_2) \neq (0, 0)$$

$a_1x + b_1y = c_1$ est une droite $\mathcal{D}_1$ de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$a_2x + b_2y = c_2$ est une droite $\mathcal{D}_2$ de vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$

(S) a une unique solution si et seulement si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un unique point, donc si et seulement si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont non colinéaires

Donc, (S) a une unique solution si et seulement si $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq 0$

De même, on peut montrer que

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$(S) \text{ a une unique solution } \iff \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \neq 0$$