

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

Romann Szczepaniak

March 26, 2025

1 Objectif

Donner un cadre général pour généraliser la structure de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

Exemple

$$2(\ln(x) + e^x) = 2\ln(x) + 2e^x$$

Peano, 1880

2 Espaces vectoriels

Définition 1 (Espace vectoriel). Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel si E est muni de deux opérations :

i. une opération interne notée $+$

ii. une opération externe notée $\times$

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

$$\times : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

qui vérifie les 8 axiomes suivants

$$\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

i. $(u + v) + w = u + (v + w)$

ii. $u + v = v + u$

iii. $\exists 0_E$ tel que $\forall u \in E, u + 0_E = u$

iv. $\forall u \in E, \exists u^-$ tel que $u + u^- = 0_E$

v. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

vi. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$

vii. $1 \times u = u$

2.1 Définitions

Les éléments de E sont appelés des vecteurs

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des scalaires

Théorème 1. *L'élément 0_E vérifiant iii est unique*

Preuve. Supposons qu'il existe 0_E et $0_{E'}$ deux éléments de E qui vérifient E

En appliquant iii à 0_E et $u = 0_{E'}$,

$$0_E + 0_{E'} = 0_E + 0_{E'} = 0_{E'}.$$

En appliquant iii à $u = 0_E$ et $0_{E'}$,

$$0_{E'} + 0_E = 0_{E'} + 0_E = 0_E.$$

$$\implies 0_E = 0_{E'}$$

□

Théorème 2. *Soit $u \in E$ Alors l'élément u^- vérifiant iv est unique. Le vecteur u^- s'appelle l'opposé de u*

Preuve. En effet, supposons que $\exists u_1^-, u_2^- \in E$ vérifiant iv

On a :

$$u + u_1^- = u_1^- + u = 0_E \tag{1}$$

$$u + u_2^- = u_2^- + u = 0_E \tag{2}$$

On ajoute u_2^- à (1)

$$(u + u_1^-) + u_2^- = u_2^- + (u_1^- + u) = 0_E + u_2^- = u_2^-.$$

□

Proposition 1. *Si $u, v, w \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, on a*

i. $u.0 = 0_E$

ii. $u^- = (-1).u$

iii. $\lambda.0_E = 0_E$

iv. $u + v = u + w \implies v = w$

$$v. \lambda.u = 0_E \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ ou \\ u = 0_E \end{cases}$$

Preuve. $\underline{0.u = 0_E}$? $u + 0.u = 1.u + 0.u = (1 + 0).u = u$

$\underline{(-1).u = u^-}$? $(-1).u + u = (-1).u + 1.u = ((-1) + 1).u = 0.u = 0_E$

Voir le fascicule pour la preuve de la suite de la proposition

□

Exemple 1. Quelques exemples d'espaces vectoriels

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

2. Soit $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n), u_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ muni de deux opérations suivantes :

$$i. u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$ii. \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$$

On vérifie que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ vérifie les 8 axiomes d'un espace vectoriel

3. $\mathbb{R}[X] = \{P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n\}$ où $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n$ muni de deux opérations

$$\text{soit } P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k, Q(X) = \sum_{k=0}^N b_k X^k$$

$$i. P(X) + Q(X) = \sum_{k=0}^N (a_k + b_k) X^k$$

$$ii. \lambda \in \mathbb{R}, \lambda P(X) = \sum_{k=0}^N \lambda a_k X^k$$

On vérifie que $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un EV

4. Soit I un ensemble quelconque. $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$

muni des deux opérations suivantes :

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a) f + g : I \rightarrow \mathbb{R}, f + g(x) = f(x) + g(x)$$

$$(b) \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

5. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}\}$ Muni des deux opérations $+$ et $\cdot$.

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

3 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 (Sous-espace vectoriel). Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel.

On dit que $F \subseteq E$ est un sous espace vectoriel de E si F vérifie deux propriétés :

$$1. 0_E \in F$$

$$2. \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on a } \lambda u + v \in F$$

Proposition 2. Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F un sous espace de E , alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Preuve . évidente

□

Exemple 2. Quelques sous-espaces vectoriels

i. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0\}$ Montrer que F est un espace vectoriel

$\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel

Montrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

(a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 + 2 \times 0 = 0$

(b) Soit $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F, u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$

Il suffit de montrer que $\lambda u_1 + u_2 \in F$

ii. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z + 1 = 0\}$

$0_{\mathbb{R}^3} \notin G$ donc G n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

iii. soit $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f'' - f = 0\}$

Montrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(a) $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Donc $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est deux fois dérivable et $0''_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} - 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} = 0$

(b) à finir

Définition 3 (Combinaison linéaire). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

et soit $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs sur E

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tel que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

On note $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{u_1, \dots, u_n\}$

Exemple 3 (Exemple). Si $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels

Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\text{Vect}\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^N\} = \sum_{i=0}^N \lambda_i X^i, \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N = \mathbb{R}_N[X].$$

Où $\mathbb{R}_N[X]$ est l'espace des polynômes de degré $\leq N$

Proposition 3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E , alors

i. $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est un sous espace vectoriel de E

ii. Si F est un sous espace vectoriel de E et si $\forall 1 \leq i \leq n, u_i \in F$
alors $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset F$

iii. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux familles finies de E Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $\text{Vect}\{\mathcal{A}\} \subset \text{Vect}\{\mathcal{B}\}$

iv. Supposons qu'il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $u_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i$.
 Alors $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\} = \text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\}$

Preuve de (i). Voici la preuve

1. $0_E = \sum_{i=1}^n 0 \cdot u_i \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$

2. Soit $u, v \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ On peut écrire u et v sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, v = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i$$

$$\text{Alors } \lambda u + v = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^n \mu_i u_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu_i) u_i$$

Donc $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ est un sous espace vectoriel

□

Preuve de (iv). Montrons que $\text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\} \subset \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Soit $u \in \text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\}$. Alors $u = \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$

Donc $u \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$.

Ainsi $\text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\} \subset \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Montrons que $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\}$

Soit $u \in \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. On peut écrire u sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i u_i.$$

Or, par hypothèse :

$$u_1 = \sum_{i=2}^n \mu_i u_i.$$

Donc

$$\mu_1 u_1 = \sum_{i=2}^n \mu_i \lambda_i u_i.$$

et

$$u = \sum_{i=2}^n (\mu_1 \lambda_i + \mu_i) u_i \in \text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\}.$$

□

Définition 4 (Famille génératrice). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ Une famille de vecteurs de E . On dit que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille génératrice de E si

$$\text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\} = E.$$

Autrement dit, $\{u_1, \dots, u_n\}$ est génératrice de E si pour tout vecteur $u \in E$, il existe

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

Exemple 4 (Exemple). $E = \mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ car, si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ Alors

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$$

Exemple 5 (Exemple). $E = \mathbb{R}_N[X] = Vect\{1, X, \dots, X^n\} \implies \{1, X, \dots, X^n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$

Exemple 6 (Exemple).

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Question : Trouver une famille génératrice de F

Soit $u = (x, y, z, t) \in F$

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4.$$

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Problème : $e_1 \notin F$

$$F \subset Vect\{e_1, \dots, e_4\}.$$

Soit $u = (x, y, z, t)$, On a

$$u \in F \iff \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} x = y - z \\ t = -5z + 3y \end{cases}.$$

$$\text{Donc } u \in F \implies u = (y - z, y, z, -5z + 3y) = y(1, 1, 0, -5) + z(-1, 0, 1, 3)$$

$$F \subset Vect\{u_1, u_2\} \text{ où } u_1 = (1, 1, 0, -5), u_2 = (-1, 0, 1, 3)$$

De plus,

$$\begin{cases} 2 \times 1 + 3 \times 1 - 0 - 5 = 5 - 5 = 0 \\ 1 - 1 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\implies u_1 \in F$$

De même, on vérifie que $u_2 \in F \implies \text{Vect}\{u_1, u_2\} \subset F$

Donc, $F = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$

Définition 5 (Famille libre). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est une famille libre si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i = 0.$$

Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ n'est pas libre, on dit que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est liée

Autrement dit, $\{u_1, \dots, u_n\}$ est liée si et seulement si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$

Remarque

Si $n = 2$

u_1, u_2 liée $\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_E$

Donc, $\{u_1, u_2\}$ libres $\iff u_1$ et u_2 non colinéaires

Exemple 7 (Exemple). $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), e_n = (0, 0, \dots, 1)$ Alors $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$

$$\text{car } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\text{Donc } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n} \implies \lambda_i = 0$$

Exemple 8 (Exemple). $\{1, X, X^2, \dots, X^N\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ car

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i X^i = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Proposition 4. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel Alors :

- i. si $u \in E, \{u\}$ est libre $\iff u \neq 0_E$
- ii. Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre
- iii. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux familles finies de vecteurs et supposons $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
Si $\mathcal{B}$ est libre alors $\mathcal{A}$ est libre
Si $\mathcal{B}$ est génératrice alors $\mathcal{A}$ est génératrice
- iv. Si $v_1, \dots, v_n \in E$, Alors $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est libre $\iff$ aucun des vecteurs v_i s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs $\{v_j : 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$
- v. Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ est libre et si $w \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ Alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre

Preuve de (v). Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0_E$

Supposons que $\lambda \neq 0$

Alors $w = \frac{-\lambda_1}{\lambda}v_1 \cdots, -\frac{\lambda_n}{\lambda}v_n$ Donc $w \in \text{Vect} \{v_1, \dots, v_n\}$ ce qui est absurde

Donc $\boxed{\lambda = 0}$

Donc $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$

Comme $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre, on en déduit que $\boxed{\forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i = 0}$

□

Définition 6 (Base). Soit F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

i. On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice de E de cardinal fini

ii. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E On dit que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E si $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre et génératrice de E

Remarque

Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E alors $\forall u \in E$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

En effet, si

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i,$$

alors

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \beta_i) u_i = 0_E$$

ce qui implique

$$\lambda_i - \beta_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Rappel

Petits rappels :

- E est de dimension finie si E admet une famille génératrice de cardinal fini.
- Une base est une famille génératrice et libre.

Théorème 3 (De la base incomplète). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0_E\}$.

Soit $\mathcal{L} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille libre et $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_s\}$ une famille génératrice de E .

Alors :

i. p

Preuve. (a) Montrons que $\text{card}(\mathcal{L}) \leq \text{card}(\mathcal{G})$

Fait 1 : Il existe $1 \leq j \leq q$ tel que $\{u_1, \dots, u_{p-1}, v_j\}$ est libre. En effet, supposons par l'absurde que :

$\forall 1 \leq j \leq q$, la famille $\{u_1, \dots, u_{p-1}, v_j\}$ n'est pas libre

$$\implies \forall 1 \leq j \leq q, v_j \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_{p-1}\}.$$

$$\implies \text{Vect}\{v_1, \dots, v_q\} \subset \text{Vect}\{u_1, \dots, u_{p-1}\}.$$

Donc $u_p \in E \subset \text{Vect}\{u_1, \dots, u_{p-1}\}$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que :

$$u_p = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{p-1} u_{p-1}.$$

$\implies \{u_1, \dots, u_{p-1}, u_p\}$ n'est pas libre, absurde.

Fait 2 : Conclusion, $p \leq q$.

Fait 1 $\implies \exists \Phi(1) \in \{1, \dots, q\}$ tel que

$$\{u_1, \dots, u_{p-1}, v_{\Phi(1)}\} \text{ est libre.}$$

Fait 2 $\implies \exists \Phi(2) \in \{1, \dots, q\}$ tel que

$$\{u_1, \dots, u_{p-2}, v_{\Phi(2)}, v_{\Phi(1)}\} \text{ est libre.}$$

Donc on construit une application

$$\Phi : \{1, \dots, p\} \longmapsto \{1, \dots, q\}$$

telle que $\{v_{\Phi(1)}, v_{\Phi(2)}, \dots, v_{\Phi(p)}\}$ est libre.

Remarquons que Φ est injective. En effet, si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq p$, alors $\Phi(i) \neq \Phi(j)$, car sinon, si $\Phi(i) = \Phi(j)$, on aurait $v_{\Phi(i)} = v_{\Phi(j)}$, et la famille $\{v_{\Phi(1)}, \dots, v_{\Phi(p)}\}$ ne serait pas libre. Donc $p \leq q$.

(b) Si $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est terminé car $\mathcal{L}$ est une base.

Si $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice, alors il existe $1 \leq j \leq q$ tel que $v_j \notin \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$. En effet, sinon $\forall 1 \leq j \leq q$, $v_j \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice.

Notons cet indice $j = i_1$, c'est-à-dire $v_{i_1} \notin \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$.

$\implies \mathcal{L}_1 = \{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}\}$ est libre.

Idée :

$$\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\} \text{ est libre et génératrice, donc c'est une base.}$$

□

Proposition 5. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$

Alors (i) E admet une base (2) et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments

Preuve. (1) Soit $u \in E, u \neq 0_E$ $\mathcal{L} = \{u\}$ est une famille libre.

Comme E est de dimension finie, il existe $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_q\}$ une famille génératrice de E

Théorème de la base incomplète $\implies \begin{cases} \text{Soit } \mathcal{L} \text{ est une base de } E \\ \text{Soit } \exists v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \text{ des vecteurs de } \mathcal{G} \\ \text{tel que } \{u, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\} \text{ est une base de } E \end{cases}$

(2) Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E Si $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice, alors $\text{card}(\mathcal{B}_1) \leq \text{card}(\mathcal{B}_2)$

Pareil à l'envers, donc $\text{card}(\mathcal{B}_1) = \text{card}(\mathcal{B}_2)$ $\square$

Définition 7 (Dimension). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $E \neq \{0_E\}$ de dimension finie
 Alors la dimension de E est le nombre entier non nul, noté $\dim(E)$ défini par $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E
 Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim E = 0$

Exemple 9 (Exemples). Petits exemples

1. $E = \mathbb{R}^n$

Une base de $\mathbb{R}^n$ est donnée par $\{e_1, \dots, e_n\}$, où $e_i = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ "0"}}, 1, 0, \dots, 0 \right\}, 1 \leq i \leq n$

Donc $\dim \mathbb{R}^n = n$

2. $E = \mathbb{R}_n[X]$

$\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

$\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$

3. $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie

Exemple d'application du théorème de la base incomplète

Soit $E = \mathbb{R}^3, (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique

$u_1 = (1, 1, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$\{u_1, e_1\}$ est libre

Est-ce que u_1, e_1, e_2 est libre ?

On résout le système $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ Et on trouve que oui

u_1, e_1, e_2 est génératrice pour les mêmes raisons

Proposition 6 (Corrolaire). soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à $n = \dim E \geq 1$

Soit $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E , alors :

- i. si $p > n$, alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ est liée
- ii. si $p < n$, alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas génératrice
- iii. si $p = n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
 - 1. $\mathcal{B}$ est une base
 - 2. $\mathcal{B}$ est libre
 - 3. $\mathcal{B}$ est génératrice

Preuve. (i). Si $p > n$

Comme $\dim E = n$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\text{card } \mathcal{B} = n$

Supposons par l'absurde que $\{p_1, \dots, v_p\}$ est libre

alors $\text{card } \{v_1, \dots, v_p\} \leq \text{card } \mathcal{B}$ Avec $\mathcal{B}$ génératrice

Alors $p \leq n$, absurde

(ii.) idem

(iii) (1.) $\implies$ (2.) et (1.) $\implies$ (3.) par définition d'une base

Montrons que (2.) $\implies$ (1.) On suppose que $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est libre, on doit montrer que c'est une base

Supposons que $\mathcal{C}$ n'est pas une base, donc n'est pas génératrice

$\exists w \in \mathcal{B}$ tel que $w \notin \text{Vect } \mathcal{C}$

Donc $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ est libre

Donc $\underbrace{\text{card } \{v_1, \dots, v_n, w\}}_{n+1 \text{ vecteurs}} \leq n \implies n+1 \leq n$. Absurde

(3.) $\implies$ (1.) exercice □

Exemple 10 (Exemple). Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$

Soit $P_0[X] = 1, P_1[X] = X - 1, P_2[X] = (X - 1)^2, P_3[X] = (X - 1)^3$

Montrer que $\mathcal{P} = P_0, P_1, P_2, P_3$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

On sait que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$

Comme $\text{card } \mathcal{P} = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, pour montrer que $\mathcal{P}$ est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre

Montrons que $\mathcal{P}$ est libre

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que:

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 (X - 1) + \lambda_2 (X - 1)^2 + \lambda_3 (X - 1)^3.$$

En évaluant en $X = 1$, on obtient que $\lambda_0 = 0$

On factorise par $(X - 1)$ et on montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Proposition 7. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soit F un sous espace vectoriel.

Alors :

i. F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$

ii. $\dim F = \dim E \iff E = F$

Preuve. $n = \dim E$

i. Montrons que F est de dimension finie

Si $F = \{0_E\}$, alors $\dim F = 0 \leq n$

Sinon soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F , alors $\mathcal{L}$ est libre dans E et $\text{card } \mathcal{L} \leq n$

Soit $\mathcal{L}_0$ une famille libre de F de cardinal maximal, On sait que $\text{card } \mathcal{L} \leq n$. Montrons que $\mathcal{L}_0$ est aussi génératrice de E

Il suffit de montrer que $F \subset \text{Vect } \mathcal{L}_0$

(a) si $v \in \mathcal{L}_0 \implies v \in \text{Vect } \mathcal{L}_0$

(b) si $v \notin \mathcal{L}_0$, supposons que $v \notin \text{Vect } \mathcal{L}_0$

Comme $\mathcal{L}_0$ est libre, on sait que $\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 \cup \{v\}$ est libre

Donc $\text{card } \mathcal{L}'_0 = \text{card } \mathcal{L}_0 + 1 > \text{card } \mathcal{L}_0$

Ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{L}_0$

Donc $v \in \text{Vect } \mathcal{L}$ Donc $F \in \text{Vect } \mathcal{L}_0$

Donc $\mathcal{L}_0$ est génératrice de F . Donc F est de dimension finie

De plus, comme $\mathcal{L}_0$ est une base de F , on a $\dim F = \text{card } \mathcal{L}_0 \leq n = \dim E$

□

Remarque

- i. Si u_1 et u_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2 \iff \det(u_1, u_2) \neq 0$
- ii. si u_1, u_2, u_3 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
alors $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3 \iff \det(u_1, u_2, u_3) \neq 0$

Définition 8. Soit E un espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ des vecteurs de E

On définit le rang de $\{u_1, \dots, u_p\}$ comme la dimension de $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$

On note $\text{rg}\{u_1, \dots, u_p\} = \dim(\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\})$

Remarque

Si E est de dimension finie, alors $\text{rg}\{u_1, \dots, u_p\} \leq \min(p, \dim E)$

Preuve. $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$ est un sous espace vectoriel de $E \implies \dim \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\} \leq \dim E$

De plus; comme $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$

On a $\dim(\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}) \leq \text{card}\{u_1, \dots, u_p\} = p$

□

Remarque 2

On a $\text{rg}(\{u_1, \dots, u_p\}) = p \iff \{u_1, \dots, u_p\}$ est libre

3.1 Méthode pratique pour calculer le rang

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E

Soit

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_3 + 2e_4 \\ u_2 = 2e_2 + e_3 - e_4 \\ u_3 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 3e_4 \\ u_4 = e_1 - 2e_2 + 3e_4 \end{cases}.$$

Calculer $\text{rg} \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $\text{Vect} \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \text{Vect} \{u_1, u_2\}$ car il y a deux colonnes nulles à la fin de la méthode du pivot

Or, $\{u_1, u_2\}$ est libre donc $\text{rg}(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}) = 2$ et $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\text{Vect} \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$$u_3'' = 0 \implies u_2 - u_3' = 0 \implies u_2 - (u_3 - 2u_1) = 0 \implies u_3 = u_2 + 2u_1$$

3.2 Opération sur les sous espaces vectoriels

Définition 9. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E

On définit la somme de E_1 et E_2 comme :

$$E_1 + E_2 = \left\{ u \in E, \begin{cases} \exists u_1 \in E_1 \\ \exists u_2 \in E_2 \end{cases} \quad u = u_1 + u_2 \right\}.$$

Théorème 4. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels.

Alors

- i. $E_1 \cap E_2$ est un sous espace vectoriel de E
- ii. $E_1 + E_2$ est un sous espace vectoriel de E

Preuve. Exercice

□

Attention

$E_1 \cup E_2$ est un sous espace vectoriel $\iff E_1 \subset E_2 \vee E_2 \subset E_1$

Théorème 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit E_1, E_2 deux sous espaces de E . Alors on a

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Preuve. Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_r\}$ une base de $E_1 \cap E_2$

Par le théorème de la base incomplète, il existe des $\{v_1, \dots, v_p\} \in E_1, \{w_1, \dots, w_q\} \in E_2$ tel que $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p\}$ base de E_1 et $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_q\}$ est une base de E_2

On a donc :

$$\dim(E_1 \cap E_2) = r.$$

$$\dim E_1 = r + p.$$

$$\dim E_2 = r + q.$$

Remarquons que : $E_1 + E_2 = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$

En effet, $u_i \in E_1 \subset E_1 + E_2$

$$u_i \in E_1 \subset E_1 + E_2$$

$$v_j \in E_1 \subset E_1 + E_2$$

$$w_k \in E_2 \subset E_1 + E_2$$

Soit $t \in E_1 + E_2$

Alors t s'écrit sous la forme $t = t_1 + t_2, t_1 \in E_1, t_2 \in E_2$

$$t_1 \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p\} \subset \text{Vect}\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$$

$$t_2 \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_q\} \subset \text{Vect}\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$$

Montrons que : $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$ est libre

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q$ des réels tel que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_q w_q = 0_E.$$

$$\implies \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_q w_q = -(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p).$$

...

$$\implies \gamma_1 = \dots = \gamma_q = 0$$

Donc ,

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_q w_q = 0_E.$$

Comme $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p\}$ est libre, on déduit que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_p = 0.$$

Donc $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$ est libre donc est une base de $E_1 + E_2$

Conclusion :

$$\dim(E_1 + E_2) = r + p + q = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

□

Définition 10. Soit E un espace vectoriel et soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E . On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si

$$E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$

Notation : $E = E_1 \oplus E_2$

Théorème 6. Soit E Un espace vectoriel de dimension finie, E_1, E_2 deux s.e.v de E

Alors :

i. $E = E_1 \oplus E_2$

ii. $E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \wedge \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

i. $\iff$ ii.

Preuve. i. $\implies$ ii. Si $E = E_1 \oplus E_2$

On a $E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \wedge E_1 + E_2 = E$

Donc $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

ii. $\implies$ i.

Si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ Alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

$\implies E_1 + E_2 = E$

Donc $E = E_1 \oplus E_2$

□

Théorème 7. Soit E un espace vectoriel de dimension fini et E_1 un s.e.v de E

Alors, E_1 admet un supplémentaire, c'est à dire :

$$\exists E_2 \subset E, E = E_1 \oplus E_2.$$

idée

Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une base de E_1

$\implies \exists \{w_1, \dots, w_r\}$ des vecteurs de E tel que $\{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\}$ est une base de E

On pose $E_2 = \text{Vect}\{w_1, \dots, w_r\}$