

Chapitre 4 : Applications linéaires

Romann Szczepaniak

April 28, 2025

1 Applications linéaires

Définition 1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \mapsto F$ est linéaire si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Notation

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F

1.1 Remarques

$f : E \mapsto F$ linéaire $\iff \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- i. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- ii. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Proposition 1. Si $f : E \mapsto F$ est linéaire, alors :

- i. $\forall u_1, \dots, u_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$
- ii. $f(0_E) = 0_F$

Preuve. [i] : Se prouve par récurrence sur le nombre de vecteurs (exercice)

[ii] Soit $u \in E$

$$f(0_E) = f(u - u) = f(u) - f(u) = 0_F.$$

□

Exemple 1 (Exemples). Quelques exemples

$$i. f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \text{ où } a \in \mathbb{R}, f \text{ est linéaire}$$

$$ii. \text{ Soit } E \text{ un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel. Alors } \text{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \mapsto & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \text{ est linéaire}$$

iii. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, alors : $0_{\mathcal{L}(E,F)} : \begin{matrix} E & \mapsto & E \\ x & \mapsto & 0_F \end{matrix}$ est linéaire

iv. Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Soit $p : \begin{matrix} E & \mapsto & E \\ u = u_1 + u_2 & \mapsto & p(u) = u_1 \end{matrix}$ p s'appelle la projection sur E_1 parallèlement à E_2 . Alors p est linéaire

En effet, soit $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2, u_1, u_2 \in E_1, v_1, v_2 \in E_2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{On a alors } \lambda u + v = \lambda(u_1 + u_2) + \lambda(v_1 + v_2) = \underbrace{\lambda u_1 + v_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda u_2 + v_2}_{\in E_2}$$

$$\implies p(\lambda u + v) = \lambda u_1 + v_1 = \lambda p(u) + p(v) \text{ Donc } p \text{ est linéaire}$$

v. Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ dérivable} \}$

$$\text{L'application } \mathcal{D} : \begin{matrix} \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \mapsto & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{matrix} \text{ est linéaire car } (\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

$$\text{vi. } I : \begin{matrix} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) & \mapsto & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{matrix} \text{ est linéaire}$$

Remarquons que $\mathcal{L}(E, F)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel. En fait, $\mathcal{L}(E, F)$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(E, F)$

$$0_{\mathcal{F}(E,F)} : \begin{matrix} E & \mapsto & F \\ u & \mapsto & 0_F \end{matrix}.$$

est linéaire

$$\implies 0_{\mathcal{F}(E,F)} \in \mathcal{L}(E, F)$$

- Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F) \lambda \in \mathbb{R}$ On doit montrer que $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$

Soit $u, v \in E, \gamma \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + g)(\gamma u + v) = \lambda f(\gamma u + v) + g(\gamma u + v) = \lambda(\gamma f(u) + f(v)) + \gamma g(u) + g(v)$$

$$(\lambda f + g)(\gamma u + v) = \gamma(\lambda f(u) + g(u)) + \lambda f(v) + g(v) = \gamma(\lambda f + g)(u) + (\lambda f + g)(v)$$

Conclusion : $\mathcal{L}(E, F)$ est un s.e.v

Proposition 2. Soient E, F, G trois espaces vectoriels.

i. si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

ii. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et f est bijective, Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$

Preuve. preuve du i

$$\text{On a } (g \circ f)(\lambda u + v) = g(f(\lambda u + v)) = g(\lambda f(u) + f(v)) = \lambda g(f(u)) + g(f(v))$$

Donc $g \circ f$ est linéaire de E dans F

ii.

$f : E \mapsto F$ est linéaire et bijective

Soit $u, v \in F, \lambda \in \mathbb{R}$ Comme f est bijective, il existe deux éléments $x, y \in E$ tel que $f(x) = u, f(y) = v$

On a

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\lambda u + v) &= f^{-1}(\lambda f(x) + f(y)) \\
 &= f^{-1}(f(\lambda x + y)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\
 &= f^{-1}(\lambda u + v) = \lambda x + y \text{ car } f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \\
 &= \lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v)
 \end{aligned}$$

□

Définition 2. Quelques définitions usuelles

- i. Si $f \in \mathcal{L}(E, E)$, on dit que f est un endomorphisme de E .
- ii. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E dans F .
- iii. Si $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et que f est bijective, on dit que f est un automorphisme de E .

1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 3. Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors :

- i. L'image de f , notée $\text{Im } f$, est un sous-ensemble de F défini par :

$$\text{Im } f = \{f(u) \mid u \in E\}.$$

- ii. Le noyau de f , noté $\ker f$, est un sous-ensemble de E défini par :

$$\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et supposons que $\dim F < +\infty$

Alors

- i. $\text{Im } f$ est un sous espace vectoriel de F
- ii. $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E
- iii. f est surjective $\iff \dim(\text{Im } f) = \dim F$
- iv. f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$

Preuve. i

$$0_F = f(0_E) \in \text{Im } f$$

Soient $u, v \in \text{Im } f, \lambda \in \mathbb{R}$ Montrons que $\lambda u + v \in \text{Im } f$

$$u \in \text{Im } f \implies \exists x \in E \text{ tel que } u = f(x).$$

$$v \in \text{Im } f \implies \exists y \in E \text{ tel que } v = f(y).$$

$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in \text{Im } f.$$

$\implies \text{Im } f$ est un s.e.v de F

ii $f(0_E) = 0_F \implies 0_E \in \ker f$ Soit $u, v \in \ker f, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= \lambda 0_F + 0_F = 0_F \end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v \in \ker f$

iii f surjective $\iff \text{Im } f = F \iff \dim(\text{Im } f) = \dim F$

iv f injective $\implies \ker f = \{0_E\}$?

- $0_E \in \ker f$ est toujours vraie si f est linéaire
- soit $u \in \ker f$ Alors $f(u) = 0_F = f(0_E)$
 $\implies u = 0_E$

Conclusion : $\ker f = \{0_E\}$

$\ker f = \{0_E\} \implies f$ injective ?

Soient $u, v \in E, f(u) = f(v)$ d'où $\underbrace{f(u) - f(v)}_{f(u-v)} = 0_F$

Donc $u - v \in \ker f \implies u - v = 0_E \implies u = v$

Conclusion : f est injective □

Proposition 3 (Importante). Soit $f : E \mapsto F$ linéaire et supposons que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E

Alors $\text{Im } f = \text{Vect}\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$

Preuve. $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\} \in \text{Im } f$. $\text{Im } f$ est un s.e.v, on a $\text{Vect}\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\} \subset \text{Im } f$

Soit $v \in \text{Im } f$.

Donc il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$

De plus, il existe $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

$$v = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i).$$

□

Théorème 2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $n = \dim E < +\infty$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de F

Alors il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_i) = v_i, 1 \leq i \leq n$

Exemple 2 (Exemple). Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ linéaire telle que

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

$$\text{et } f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ 3x + 3y - z \\ -x - y + z \end{pmatrix}$$

Montrer que f est linéaire (facile), et déterminer une base de $\ker f$ et de $\text{Im } f$

base du noyau : $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \text{ alors } u \in \ker f \iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 3x + 3y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 3x + 3y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -5z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff u = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}$$

Donc $\ker f \subset \text{Vect } \{u_1\}$?

$$f(u_1) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \\ 3 \times 1 + 3 \times (-1) + 0 \\ -1 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies u_1 \in \ker f.$$

Donc $\ker f = \text{Vect} \{u_1\}$

De plus, $\dim \ker f = \text{card} \{u_1\} = 1$

base de $\text{Im } f$

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Alors $\text{Im } f = \text{Vect} \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

$$v_1 = f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = v_2 \implies \text{Im } f = \text{Vect} \{v_1, v_3\}$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \implies v_1 \text{ et } v_3 \text{ non colinéaires} \implies \{v_1, v_3\} \text{ est libre}$$

Donc $\{v_1, v_3\}$ est une base de $\text{Im } f$

Et $\{v_1, v_3\}$ est une base de $\text{Im } f$

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\dim E < +\infty$

Le rang de f est par définition la dimension de $\text{Im } f$

Notation

Le rang de f se note $\text{rg } f$

Alors, on a $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$

Remarque

Comme E est espace vectoriel de dimension finie disons n , et si $n \geq 1$ et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E

$$\text{Alors } \text{Im } f = \text{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

$$\text{rg } f = \dim \text{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

Théorème 3 (du rang). Soit $f : E \mapsto F$ linéaire et supposons que $\dim E < +\infty$

$$\text{Alors } \dim E = \dim(\ker f) + \text{rg } f$$

Preuve. 1er cas

$$\forall x \in E, f(x) = 0_F, \text{ donc } \text{Im } f = \{0_F\}$$

$$\text{Donc } \dim(\ker f) + \underbrace{\dim(\text{Im } f)}_{=0} = \dim E$$

$$\text{2e cas } \ker f \stackrel{?}{=} \{0_E\}$$

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E \neq \{0_E\}$

$$\text{Im } f = \text{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

Montrons que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est libre

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0_F = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right).$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \ker f = \{0_E\} \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$$

Or, $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E donc une famille libre. Ainsi, $\lambda_i = 0 \ 01 \leq i \leq n$

Donc $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est libre et donc une base de $\text{Im } f$

Conclusion : $\dim \text{Im } f = \dim E$

3e cas : $\ker f \neq E$ et $\ker f \neq \{0_E\}$

Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une base de $\ker f$, ($1 \leq p \leq n$ où $n = \dim E$)

Par le théorème de la base incomplète, il existe $\{u_{p+1}, \dots, u_n\}$ des vecteurs de E tels que $\{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$ est une base de E

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left\{ \underbrace{f(u_1)}_{=0_F}, \dots, \underbrace{f(u_p)}_{=0_F}, f(u_{p+1}), \dots, f(u_n) \right\}.$$

$$\text{Donc } \text{Im } f = \text{Vect} \{f(u_{p+1}), \dots, f(u_n)\}$$

$$\text{Objectif : } \underbrace{\dim E}_{=n} = \underbrace{\dim \ker f}_p + \dim \text{Im } f$$

Montrons que $\{f(u_{p+1}), \dots, f(u_n)\}$ est libre

soit $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_{p+1} f(u_{p+1}) + \dots + \lambda_n f(u_n) = 0_F \implies f(\lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n) = 0_F.$$

$$\implies \lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n \in \ker f$$

Comme $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une base de $\ker f$

il existe $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n &= \mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p \\ \implies \mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p - \lambda_{p+1} u_{p+1} - \dots - \lambda_n u_n &= 0_E \end{aligned}$$

$\{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$ est libre

Donc $\mu_1 = \dots = \mu_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0 \implies \{f(u_{p+1}), \dots, f(u_n)\}$ est libre

Donc une base de $\text{Im } f$

$$\implies \dim(\text{Im } f) = \text{card} \{f(u_{p+1}), \dots, f(u_n)\} = n - p$$

□

Théorème 4. Soit $f : E \mapsto F$ linéaire et supposons que $\dim E = \dim F < +\infty$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i. f injective

ii. f surjective

iii. f bijective

Preuve. (iii) $\implies$ (i) et (iii) $\implies$ (ii) toujours vraie

(i) $\implies$ (ii) On applique le théorème du rang

$$\dim F = \dim E = \underbrace{\dim(\ker f)}_{=0(f \text{ injective})} + \dim(\operatorname{Im} f)$$

$$\implies \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F \implies \operatorname{Im} f \subset F \implies \operatorname{Im} f = F \implies f \text{ est surjective}$$

(ii) $\implies$ (i) : Comme f est surjective,

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F = \dim E.$$

Théorème du rang $\implies \dim(\ker f) = 0$

Donc f est injective

□

Proposition 4 (Corollaire). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\dim E < +\infty$, les assertions suivantes sont équivalentes

i. f est bijective

ii. $\forall \{e_1, \dots, e_n\}$ base de E , $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F

iii. $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E tel que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F

Preuve. (i) $\implies$ (ii) supposons que f est bijective et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E

$$\ker f = \{0_E\} \text{ et } \operatorname{Im} f = F$$

$$F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E - \dim(\ker f) = n - 0 = n \text{ par le théorème du rang}$$

$$\implies \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \text{ est une base de } F$$

(ii) $\implies$ (iii) évident

(iii) $\implies$ (i) : Supposons qu'il existe $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E tel que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F

On en déduit que $\dim E = \dim F$

$$F = \operatorname{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = \operatorname{Im} f$$

$$\implies f \text{ surjective} \xrightarrow{\dim E = \dim F} f \text{ est bijective}$$

□

Remarque

Supposons qu'il existe $f : E \mapsto F$ linéaire et bijective et E et F de dimension finie

Alors $\dim E = \dim F$

Définition 5 (isomorphisme). Si E et F sont deux espaces vectoriels. On dit que E et F sont isomorphes s'il existe $f : E \rightarrow F$ linéaire et bijective

Théorème 5. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie

Alors E et F isomorphes $\iff \dim E = \dim F$

Preuve. $\implies$ déjà montré

$\impliedby$ Si $\dim E = \dim F$ soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de F

On construit l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ tel que $f(e_i) = v_i, 1 \leq i \leq n$

Le corollaire précédent $\implies f$ bijective

□