

Chapitre 5 : Matrices et applications linéaires

Romann Szczepaniak

April 28, 2025

1 Matrices

Définition 1 (Matrice). Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice à m lignes et n colonnes est la donnée de $m \times n$ réels $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ rangées dans un tableau

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

On écrit aussi $M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

On note $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de m lignes et de n colonnes à coefficients réels

$\mathcal{M}_{m \times n} \neq \mathcal{M}_{n \times m}$ si $m \neq n$

Exemple 1 (Exemples). exemples de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

On peut munir $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de deux opérations

i. Si $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$

On définit $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$

ii. si $A = (a_{i,j})$

On définit $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$

Proposition 1. L'espace $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ muni des deux opérations précédentes forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Remarque

$$0_{\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 (Exemple). Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Alors,

- $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Définition 2. Une matrice élémentaire sur $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice $E_{k,l} = (a_{i,j})$ où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple 3 (Exemple). Sur $\mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, les matrices élémentaires sont :

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{2,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{2,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{3,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & E_{3,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} \end{pmatrix}$

On a

$$M = m_{1,1}E_{1,1} + m_{1,2}E_{1,2} + \dots + m_{3,2}E_{3,2}.$$

On déduit que $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

De plus, $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2\}$ est libre car si $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}, m_{3,1}, m_{3,2}$ des réels tels que

$$m_{1,1}E_{1,1} + m_{1,2}E_{1,2} + \dots + m_{3,2}E_{3,2} = 0_{\mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{i,j} = 0$$

Donc, $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2\}$ est une base de $\mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

Théorème 1. *L'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie dont une base est donnée par*

$$\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2\}.$$

Et on obtient donc :

$$\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \times n.$$

1.1 Multiplication de deux matrices

On a une troisième opération qui est la multiplication de deux matrices

Soit $A = (a_{i,j}), B = (b_{j,k})$

On définit le produit $C = AB \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$ comme $C = (c_{i,k})$

$$C_{i,k} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k}.$$

Exemple 4 (Exemple). *Multiplication matricielle*

$$i. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in (M)_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$ii. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in (M)_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$(M)_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \times (M)_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow (M)_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 - 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 1 \\ 2 \times 1 - 1 \times 3 + 4 \times 1 & 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1.2 Quelques propriétés

Soient A, B, C trois matrices. Si les opérations suivantes ont un sens (c'est-à-dire que les conditions sur les tailles sont vérifiées), on a :

- i. $A(BC) = (AB)C$
- ii. $A(B + C) = AB + AC$
- iii. $(A + B)C = AC + BC$
- iv. $A \times 0 = 0 \times A = 0$
- v. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ et on définit $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors $AI_n = I_n A = A$

AB n'est pas toujours égal à BA comme vu précédemment

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$$

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

On a bien $AB = AC$ mais $B \neq C$

Définition 3 (Vocabulaire). *Quelques définitions*

- i. Une matrice carée est une matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est d'ordre n
- ii. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A et B commutent si $AB = BA$

Théorème 2 (Formule du binôme de Newton). Soient $M, N \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si $MN = NM$, alors :

$$(M + N)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} M^k N^{l-k}.$$

par convention, $M^0 = I_n$

Preuve. Identique à la preuve pour les réels, récurrence sur l

Initialisation :

$$\begin{aligned} (M + N)^2 &= (M + N)(M + N) = M^2 + MN + NM + N^2 \\ &= M^2 + 2MN + N^2 \end{aligned}$$

preuve pas finie, mais pareil que la récurrences pour les nombres

□

Application de la formule du binôme de Newton au calcul de puissance d'une matrice

Définition 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i. M est diagonale si M est de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

ii. M est nilpotente d'ordre $p, p \in \mathbb{N}^*$ si

$$M^p = 0.$$

Remarques

1. Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors on peut montrer par récurrence que

$$M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_p^k \end{pmatrix}.$$

2. Si M est nilpotente d'ordre p , alors $M^k = 0, \forall k \geq p$

Exemple 5 (Calcul de puissance). Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Calculer A^{2025}

On peut décomposer A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

On a alors :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie ensuite que $DN = ND$ (vrai)

Donc, par le binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{2025} \binom{2025}{k} N^k D^{2025-k} = D^{2025} + 2025ND^{2024}.$$

1.3 Matrices inversibles

Définition 5 (Matrice inversible). si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est inversible s'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MN = NM = I_n$ (*)

Remarque

- i. Si M est inversible, la matrice N vérifiant (*) est unique et s'appelle l'inverse de M et qu'on note $N = M^{-1}$
- ii. On a $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. Mais si A est inversible, alors $AB = AC \Rightarrow B = C$

Question

Comment montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse ?

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$
$$\iff (S) \begin{cases} x + y + 2z = X \\ x + 2y + z = Y \\ 2x + y + z = Z \end{cases}$$

M est inversible si et seulement si $\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, le système (S) possède une unique solution

(x, y, z)

On applique la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} X + y + 2z = X \\ y - z = Y - X \\ y + 3z = 2X - Z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + 2z = X \\ y - z = Y - X \\ 4z = 3X - Y - Z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{4}X - \frac{1}{4}Y + \frac{3}{4}Z \\ y = -\frac{1}{4}X + \frac{3}{4}Y - \frac{1}{4}Z \\ z = \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}Y - \frac{1}{4}Z \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2 Lien entre matrice et application linéaire

Dans la suite, on fixe deux e.v E et F munis respectivement d'une base $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_m\}$, de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Définition 6. Si pour $1 \leq i \leq n$

$$f(e_i) = a_{1,i}f_1 + \dots + a_{m,i}f_m.$$

Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

On note $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$

Notation

Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on notera

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E).$$

Exemple 6 (matrice d'une application linéaire). Soit :

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + z \\ 3x + 6y + 4z \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

On vérifie que f est linéaire (elle l'est)

On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Définition 7. Si $u \in E$, on note $[u]_{\mathcal{B}_E} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ la matrice de n lignes et de 1 colonne constituée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$. Autrement dit, si $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ où $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ alors,

$$[u]_{\mathcal{B}_E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 2. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et $u \in E$

On a : $[f(u)]_{\mathcal{B}_F} = M [u]_{\mathcal{B}_E} = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) [u]_{\mathcal{B}_E}$

Proof. voir fasticule

□

Exemple 7. $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + z \\ 3x + 6y + 4z \end{pmatrix} \end{matrix}$

$$\text{Si } u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Proposition 3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Alors,

$$\text{Mat}\{\lambda f + \mu g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F\} = \lambda \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mu \text{Mat}(g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Preuve. découle du fait que $(\lambda f + \mu g)(e_i) = \lambda f(e_i) + \mu g(e_i)$ □

Théorème 3 (Composition d'applications). soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

$$\text{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \text{Mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Preuve. voir fasticule □

Proposition 4 (Corollaire). Soient E et F deux e.v de même dimension et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$

Alors:

$$f \text{ est bijective} \iff M \text{ est inversible}$$

De plus, si f est bijective, on a :

$$\text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = M^{-1} = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)^{-1}.$$

Preuve. $\implies$ Supposons f bijective

Donc, $\exists h = f^{-1} : F \mapsto E$ linéaire telle que

$$h \circ f = Id_E \qquad f \circ h = Id_F$$

On a alors :

$$\text{Mat}(Id_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(h \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E).$$

On applique le théorème avec $G = E$ et $g = h = f^{-1}$

$$\text{Mat}(Id_E, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) \times \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

$$\implies M \text{ est inversible et } M^{-1} = \text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)$$

□

Exemple 8. soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + 2y + z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$

f bijective ?

Première méthode : On calcule le noyau et on montre que $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Deuxième méthode : On raisonne matriciellement

$$M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On montre que } M \text{ est inversible et on a } M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3 Changement de base

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni de deux bases

$$\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\} \quad \mathcal{B}'_E = \{f_1, \dots, f_n\}$$

et soit $u \in E$

Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i f_i.$$

Comment peut-on passer de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ à $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$? Existe-t-il une formule entre $[u]_{\mathcal{B}_E}$ et $[u]_{\mathcal{B}'_E}$

Il existe un outil qui permet de répondre à la question : matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$

Définition 8. On appelle matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Notation

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Exemple 9 (Exemple). *i. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } P_1(X) = 1 + X + X^2 \quad P_2(X) = 1 + X^2 \quad P_3(X) = X + X^2$$

$$E = \mathbb{R}_2[X], \mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$$

On vérifie que $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une famille libre donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Comme $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ et Id_E est bijective

$\implies \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \text{Mat}(\text{Id}_E^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Théorème 4. Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, Alors pour tout $u \in E$, on a :

$$\begin{aligned} [u]_{\mathcal{B}_1} &= \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}'} \\ [u]_{\mathcal{B}'} &= \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} [u]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Preuve. Rappelons que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F alors $\forall u \in E$,

$$[f(u)]_{\mathcal{B}_F} = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) [u]_{\mathcal{B}_E}.$$

On applique cette égalité avec $E = F$, $f = \text{Id}_E$, $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}'$

On a alors $[u]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}_{=\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}} [u]_{\mathcal{B}}$

Donc, $[u]_{\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} [u]_{\mathcal{B}} \implies \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} [u]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}$

□

Exemple 10 (Exemple). Soit $Q(X) = 1 + 2X + 15X^2$

On note $\mathcal{B}' = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$ qui est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Exprimer $P(X)$ dans cette nouvelle base.

On écrit $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\implies [Q]_{\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} [Q]_{\mathcal{B}}$$

center

$\text{Mat}(f, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$

$= \text{Mat}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = \text{Mat}(\text{Id}_F, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F) \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E)$

$= \mathcal{P}_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F}^{-1} \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \mathcal{P}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$

Théorème 5. Soit E muni de deux bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$

Soit F muni de deux bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$

Et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$ $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F}$

alors,

$$\boxed{\text{Mat}(f, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = Q^{-1} \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) P.}$$

Proposition 5 (Corollaire). Si $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E

$$P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$$

Alors, $\text{Mat}(f, \mathcal{B}'_E) = P^{-1} \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E) P$

Exemple 11 (Exemple d'application). En seconde année, on va étudier le problème de l'existence de matrice de changement de bases $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ tel que : $D = P^{-1} \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E) P$ soit une matrice diagonale, c'est-à-dire de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E) = P D P^{-1}$$

$$f^{[k]} = f \circ f \circ \dots \circ f$$

$$\text{Mat}(f^{[k]}, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E)^k = P D P^{-1} P D P^{-1} \dots P D P^{-1} = P D^k P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$