

Chapitre 6 : Intégrale de Riemann

Romann Szczepaniak

March 26, 2025

Deux objectifs du chapitre :

- i. Calcul de primitives et d'intégrales
- ii. Construction de l'intégrale de Riemann

1 Primitives

Définition 1 (Primitives). *soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$*
Une primitive de f sur I (si elle existe) est une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie et dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in I, F'(t) = f(t).$$

Exemple 1. $F : \begin{matrix} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 \end{matrix}$ est une primitive de $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2t \end{matrix}$

Remarque

Si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I , alors l'ensemble de toutes les primitives de f sur I est donnée par $\{F_0 + C : C \in \mathbb{R}\}$

En effet, si $F = F_0 + c$ est une primitive de f car F est dérivable sur I et $F' = (F_0 + c)' = F_0' = f$

De plus, si F est une primitive de f sur I , alors F est dérivable et

$$\forall t \in I, (F - F_0)'(t) = F'(t) - F_0'(t) = f(t) - f(t) = 0.$$

Comme I est un intervalle, $F - F_0$ est une constante sur I

$$\implies \exists c \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall t \in I, F(t) - F_0(t) = c$$

Notation : une primitive de f se note

$$\int f(x) dx.$$

Si F_0 est une primitive de f , on a :

$$\int f(x) dx = F_0(x) + c \forall c \in \mathbb{R}.$$

Remarque

On démontrera dans la deuxième partie du chapitre que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive

1.1 Propriétés

- i. soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction admettant des primitives F et G sur I

Remarquons que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha F + \beta G$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$

$$(\alpha F + \beta G)'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Donc :

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Théorème 1 (Formule de changement de variable). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et supposons que f admet une primitive F sur I

Soit $u : J \rightarrow I$ une fonction dérivable sur J . Alors :

$$\int (f \circ u)(x) u'(x) dx = F(u(x)) + c.$$

Preuve. $F \circ u : J \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur J et $\forall x \in J$

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \times u'(x) = f(u(x)) \times u'(x).$$

□

Exemple 2 (Changement de variable). i. Calculer $\int 2x \cos(x^2) dx$

On prend $f(x) = \cos(x), u(x) = x^2$

$$u'(x) = 2x$$

Par la formule du changement de variable, on a :

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int f(u(x)) \times u'(x) dx = \sin(x^2) + C.$$

On pose $t = x^2 \implies dt = 2x dx$

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos(t) dt = \sin(t) + c = \sin(x^2) + c.$$

ii. Calculer $\int \sqrt{1-x^2} dx$ sur $] -1, 1[$

On pose $x = \sin(t), t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Donc $1 - x^2 = 1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$. Donc,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t) \text{ car } \cos(t) > 0 \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

On a alors $dx = \cos(t) dt$

$$\text{alors, } \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos(t) \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt$$

$$\text{On a, avec les formules d'Euler } \cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$\text{Donc, } \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int 1 + \cos(2t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) + c$$

$$\text{On a ensuite } t = \arcsin(x), x \in]-1, 1[$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + \frac{\sin(2 \arcsin(x))}{2} \right) + c$$

1.2 Formule d'intégration par parties

Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I , donc $u \times v$ est dérivable sur I

$$\text{et } \forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \text{ donc : } \begin{array}{ccc} I & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \end{array}$$

est une primitive de uv

$$\text{Autrement dit, } \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = u(x)v(x)$$

$$\boxed{\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.}$$

Exemple 3 (Application de l'IPP). Essayons de trouver une primitive de la fonction $\arctan(x)$

$$\int \arctan(x) dx.$$

$$\text{On pose} \quad v(x) = \arctan(x) \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{On pose} \quad u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

Donc, par la formule d'IPP, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx. \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

1.3 Primitives usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$
e^x	$e^x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$

Remarque

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

1.4 Quelques méthodes de calcul de primitives pour certains types de fonctions

- i. Primitive de $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où $P \in \mathbb{R}[X], \alpha \in \mathbb{R}^*$

On effectue des IPP en dérivant le polynôme et en intégrant l'exponentielle

Exemple 4.

$$\int (x^2 + x + 1) e^{2x} dx.$$

$$\begin{array}{l|l} v(x) = x^2 + x + 1 & v'(x) = 2x + 1 \\ u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} & u'(x) = e^{2x} \end{array}$$

$$IPP \Rightarrow \int (x^2 + x + 1) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 1) e^{2x} dx$$

$$\begin{array}{l|l} v(x) = 2x + 1 & v'(x) = 2 \\ u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} & u'(x) = e^{2x} \end{array}$$

$$IPP \Rightarrow \int (2x + 1) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (2x + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} \times 2 \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} (2x + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

D'où :

$$\int (x^2 + x + 1) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x + 1) e^{2x} + c.$$

- ii. Primitives de $f(x) = \cos(\alpha x)e^{\beta x}$ ou $f(x) = \sin(\alpha x)e^{\beta x}$

On effectue deux IPP en dérivant le cos ou le sin et en intégrant l'exponentielle

Exemple 5. Calculer $\int \cos(2x)e^{2x}dx$

$$\left. \begin{array}{l} v(x) = \cos(2x) \\ u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| \begin{array}{l} v'(x) = -2\sin(2x) \\ u'(x) = e^{2x} \end{array}$$

$$IPP \Rightarrow \int \cos(2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} + \int \sin(2x)e^{2x}dx$$

$$\left. \begin{array}{l} v(x) = \sin(2x) \\ u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| \begin{array}{l} v'(x) = 2\cos(2x) \\ u'(x) = e^{2x} \end{array}$$

$$IPP \Rightarrow \int \sin(2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\sin(2x)e^{2x} - \int \cos(2x)e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(2x)e^{2x} - \int \cos(x)e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos(2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(2x)e^{2x} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \cos(2x)e^{2x}dx = \frac{1}{4}(\cos(2x) + \sin(2x))e^{2x} + c.}$$

iii. Primitives de $f(x) = \sin^m(x)\cos^n(x)$, $n, m \in \mathbb{N}$

- L'un des entiers m ou n est impair, par exemple $n = 2p + 1$

$$\begin{aligned} \int \sin^m(x)\cos^n(x)dx &= \int \sin^m(x)\cos^{2p+1}(x)dx \\ &= \int \sin^m(x)(\cos^2(x))^p \cos(x)dx \\ &= \int \sin^m(x)(1 - \sin^2(x))^p \cos(x)dx \end{aligned}$$

On pose $t = \sin(x)$. Donc $dt = \cos(x)dx$. La formule de changement de variable donne :

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx = \int t^m(1 - t^2)^p dt.$$

- Si m et n sont pairs :

On linéarise en utilisant les formules d'Euler

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos^n(x)\sin^m(x) &= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^n}{2^n} \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^m}{(2i)^m} \end{aligned}$$

Avec la formule du binôme de Newton, on peut alors écrire le produit comme une combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$

iv. Primitives de fractions rationnelles

On veut calculer $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$, on est donc ramené au calcul des primitives des termes de la forme suivante

- $\int E(x)dx$ où E est un polynôme
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ où $n \geq 1, a \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n}$ où $n \geq 1, \alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4ac < 0$

Intégration de (ii) : $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^n dx = \begin{cases} \ln(|x-a|) + c & \text{si } n = 1 \\ \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$

Comment intégrer (iii) ?

Exemple 6. • $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$

$$\text{On prend } \frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{4}(4x+1) + \frac{3}{4}}{2x^2+x+1}$$

$$\text{Donc, } \int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{2x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln(2x^2+x+1) + \frac{3}{4} \int \frac{1}{2x^2+x+1} dx$$

On écrit $2x^2+x+1$ sous la forme canonique,

c'est-à-dire $2x^2+x+1 = (\dots + \dots)^2 + cte$

$$= 2 \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right]$$

$$= 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}$$

$$\int \frac{1}{2x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{7} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{\sqrt{7}} \left(x + \frac{1}{4} \right) \right)^2} dx$$

$$\text{On pose } u = \frac{4}{\sqrt{7}} \left(x + \frac{1}{4} \right)$$

$$du = \frac{4}{\sqrt{7}} dx \implies dx = \frac{\sqrt{7}}{4} du$$

$$\text{Donc, } \int \frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}} \left(x + \frac{1}{4} \right)\right) + c$$

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bornée, c'est-à-dire qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$

Soit $A = \left\{ \int_a^b \phi(x) dx : \phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \text{ en escalier et telle que } \forall x \in [a, b], \phi(x) \leq f(x) \right\}$

Soit $B = \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \text{ en escalier et telle que } \forall x \in [a, b], \psi(x) \geq f(x) \right\}$

Si $\forall x \in [a, b]$, on pose $\phi(x) = m$. Alors ϕ est une fonction en escaliers et $\forall x \in [a, b], \phi(x) \leq f(x)$

$\implies \int_a^b \phi(x) dx \in A$. Donc $A \neq \emptyset$

De plus, si $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction en escaliers et telle que $\forall x \in [a, b], \phi(x) \leq f(x)$, en particulier, on a $\forall x \in [a, b], \phi(x) \leq M$

Donc, $\int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a) \implies A$ est non vide et majoré par $M(b-a)$

Donc, $\sup(A)$ existe

De même, on montre que B est non vide et minorée par $m(b-a)$

Donc, $\inf(B)$ existe, et de plus, $\sup(A) \leq \inf(B)$

Définition 2. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bornée. On dit que f est Riemann intégrable si $\sup(A) = \inf(B)$ et dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \sup(A) = \inf(B).$$

Remarque

Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est en escalier, la définition qu'on vient de voir coïncide avec la définition précédente

Attention

Il existe des fonctions bornées qui ne sont pas Riemann-intégrables.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Théorème 2. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bornée. Alors f est Riemann-intégrable si et seulement si il existe $(\phi_n)_{n \geq 1}$ et $(\psi_n)_{n \geq 1}$, $\phi_n, \psi_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de fonctions en escaliers telle que $\forall x \in [a, b], \phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$

Proposition 1 (Corollaire). Soit $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables.

Alors :

i. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est Riemann-intégrable et $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

ii. Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

iii. f est Riemann-intégrable, et on a $\left| \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Convention

$$\text{Si } a \leq b, \int_a^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

2 Fonctions continues et intégrabilité

Définition 3. Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(\forall x, y \in I, |x - y| < \delta) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Rappel

$$f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ est continue} \iff \forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in I, \exists \delta > 0 \text{ tel que } y \in I, |y - x_0| < \delta \implies |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Remarque

Uniformément continue $\implies$ continue

L'inverse est faux

La fonction : $\begin{matrix} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue

$$(|y^2 - x_0^2| = |y - x_0| |y + x_0|)$$

Théorème 3 (Heine). Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue

Preuve. On va raisonner par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue

Donc, $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ tel que $\exists x, y \in I, |y - x| < \delta \wedge |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$

En appliquant ce qui précède avec $\delta = \frac{1}{n}, n \geq 1$, on obtient deux suites $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n \in [a, b], y_n \in [a, b], |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Comme $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ (où $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est une application strictement croissante) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\phi(n)} = \alpha \in [a, b]$

$$\text{Or, } |x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}| < \frac{1}{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies y_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$$

Or f est continue en α

$$\text{Donc } f(x_{\phi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha) \text{ et } f(y_{\phi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha)$$

Ce qui contredit $|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| \geq \varepsilon$ □

Théorème 4. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Alors f est Riemann-intégrable

Preuve. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Découpons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles avec $\frac{b-a}{n} < \delta$

$$x_i := a + \frac{i(b-a)}{n}, 0 \leq i \leq n.$$

Et définissons pour $x \in]x_{i-1}, x_i[, 1 \leq i \leq n$

$$\phi(x) = f(x_{i-1}) - \varepsilon \text{ et } \psi(x) = f(x_{i+1}) + \varepsilon$$

$$|x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n} < \delta$$

$$\text{Si } x \in]x_{i-1}, x_i[, \phi(x) - f(x) = f(x_{i-1}) - f(x) - \varepsilon$$

$$x \in]x_{i-1}, x - i[\implies |x - x_{i-1}| = x - x_{i-1} < \varepsilon \implies f(x_{i-1}) - f(x) \leq |f(x_{i-1}) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\implies x \in]x_{i-1}, x_i[, \phi_n(x) - f(x) \leq 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \phi_n(x) \leq f(x)$$

$$\text{Si on pose } \phi_n(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n \implies \forall x \in [a, b], \phi_n(x) \leq f(x)$$

$$\text{De même, } \forall x \in [a, b], \psi_n(x) \geq f(x)$$

Donc ϕ et ψ sont deux fonctions en escaliers.

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b]$$

$$0 \leq \inf(B) - \sup(A) \leq \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx$$

De plus,

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1} + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1} - \varepsilon)(x_i - x_{i-1})).$$

Ce qui donne $\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \phi(x)dx = 2\varepsilon(b-a)$
 $\implies 0 \leq \inf(B) - \sup(A) \leq 2\varepsilon(b-a) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \inf(B) = \sup(A)$

□

Théorème 5 (de la moyenne). Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Preuve. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Donc $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

$$f(x_1)(b-a) = \int_a^b f(x_1)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_2)dx = f(x_2)(b-a)$$

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)$$

Le théorème des valeurs intermédiaires $\implies \exists c \in [x_1, x_2]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ □

Théorème 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue

Alors $F : \begin{matrix} I & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{matrix}$ est l'unique primitive qui s'annule en a

Preuve. Soit $x, x_0 \in I, x \neq x_0$.

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)dt \right) - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt = f(c_x) \text{ où } c_{x,x_0} \text{ est compris entre } x \text{ et } x_0 \end{aligned}$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(c_x) = f(x_0) \implies F$ est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$

$\implies F$ est dérivable sur I et $F' = f$ □

Théorème 7 (fondamental de l'analyse). Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue et si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Preuve. Soit F_0 l'unique primitive de f qui s'annule en a , on a que

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b].$$

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a, b], F(x) = F_0(x) + c.$$

D'où :

$$F(b) - F(a) = F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt \quad \square$$

Théorème 8 (Intégration par parties). Soit $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors :

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Preuve. uv est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall t \in [a, b], (uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$

Donc, uv est une primitive de $t \mapsto u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$

Le théorème fondamental de l'analyse implique que

$$\begin{aligned} \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\ \Rightarrow \int_a^b u'(t)v(t) dt &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 9 (du changement de variable). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ et $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.

$F \circ \phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $\forall t \in [\alpha, \beta], (F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \times \phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$

Donc, $F \circ \phi$ est une primitive de $t \mapsto f(\phi(t))\phi'(t)$

Donc le théorème fondamental de l'analyse implique

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t) dt = (F \circ \phi)(\beta) - (F \circ \phi)(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

3 Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bornée, $\varsigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ et soit $\mathcal{E} = \{t_1, \dots, t_n\}$ n points tels que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$

$$S(f, \varsigma, \mathcal{E}) \stackrel{\text{notation}}{:=} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

La somme de Riemann est associée à $f, \varsigma, \mathcal{E}$

Théorème 10. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ Riemann-intégrable. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall \varsigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ subdivision de } [a, b] \\ \forall E = \{t_1, \dots, t_n\}, t_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n \\ \delta(\varsigma) < h \implies \left| \int_a^b f(x) dx - S(f, \varsigma, \delta) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Dans le cas où f continue. Théorème de Heine $\implies f$ est uniformément continue.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \text{ tel que } (x, y \in [a, b], |x - y| < h) \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Soit $\varsigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision tel que $\delta(\varsigma) < h$ et soit $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt - (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(t_i)) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(t_i)) dt \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t) - f(t_i)| dt \end{aligned}$$

$$t - t_i \leq \delta(\varsigma) < h \implies |f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b - a} dt = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dt = \varepsilon$$

□

Proposition 2 (Corollaire). Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b - a}{n}\right).$$

Preuve. $\varsigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ où $x_k = a + \frac{k(b - a)}{n}$, $0 \leq k \leq n$, $t_k = x_k$, $1 \leq k \leq n$

$$E = \{t_k, 1 \leq k \leq n\}$$

$$S(f, \varsigma, E) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \implies \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + i \frac{b-a}{n})$$

Soit $\varepsilon \implies 0$. D'après le théorème précédent, $\exists h > 0$ tel que $\forall \varsigma'$ subdivision de $[a, b]$, $\forall E'$ les points de la subdivision ς'

$$\delta(\varsigma') < h \implies \left| \int_a^b f(t)dt - S(f, \varsigma', E') \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Comme } \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \exists n_0 | n \geq n_0 \implies \frac{b-a}{n} < h$$

$$n \geq n_0 \implies \left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + i \frac{b-a}{n}) \right| < \varepsilon \quad \square$$

3.1 Application

$$\text{Soit } u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Calculer $\lim u_n = ?$

$$\text{On remarque que } u_n = \frac{1}{n(1 + \frac{1}{n})} + \frac{1}{n(1 + \frac{2}{n})} + \dots + \frac{1}{n(1 + \frac{n}{n})}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

On pose $f(t) = \frac{1}{1+t}$, $t \in [0, 1]$. f continue sur $[0, 1]$ et

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(t)dt.$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} = \ln(2)$$

$$\text{Donc, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)}$$