

Chapitre 7 : Formules de Taylor et Développements limités

Romann Szczepaniak

April 28, 2025

1 Objectifs

Approcher des fonctions par des polyômes

Rappel

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I =]\alpha, \beta[, -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ Et si $a \in I$,

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + (t - a)\varepsilon(t).$$

Avec $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$

On a que $f(a) + f'(a)(t - a)$ est un polynôme de degré 1

Fixons $I =]\alpha, \beta[, -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C^0(I, \mathbb{R}) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ continue} \}$$

$$C^n(I, \mathbb{R}) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ de classe } C^n\}$$

Définition 1 (Polynôme de Taylor). Soit $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, $a \in I$.

On appelle polynôme de Taylor de f , à l'ordre n et au point a la fonction polynômiale suivante

$$T_n(f, a, x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Remarque

$T_n(f, a, x)$ est l'unique polynome p de degré $\leq n$ tel que

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \forall 0 \leq k \leq n.$$

2 Le reste de Taylor

$$R_n(f, a, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Théorème 1 (Taylor avec reste intégral). Soit $f \in C^{n+1}(I)$, $I =]\alpha, \beta[$, $a \in I$. Alors, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Preuve par récurrence. Initialisation. $n = 0$

On doit montrer que si f est C^1 sur I , alors $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Ce qui est vrai d'après le théorème fondamental de l'analyse

Hérédité : On suppose que la formule est vraie pour les fonctions de classes C^{n+1} pour un certain entier $n \geq 0$

Soit f une fonction de classe C^{n+2} sur I . Donc en particulier, comme f est de classe C^{n+1} et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

On effectue une IPP

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.$$

De plus,

$$\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a).$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.$$

□

Théorème 2 (Formule de Taylor-Lagrange). Soit $f \in C^{n+1}(I)$, $a \in I$. Alors, $\forall x \in I$, $\exists c$ compris entre a et x (qui dépend de a et x) tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarques

- i. $n=0$ c'est l'égalité des accroissements finis
- ii. Le problème de cette formule est qu'on ne sait rien en général que le c à part qu'il existe

Preuve. 1er cas : $x > a$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Il reste à montrer qu'il existe $c \in [a, x]$ tel que $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

$f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, x]$ donc elle admet un maximum et un minimum : il existe $c_1, c_2 \in [a, x]$ tel que $\forall t \in [a, x], f^{(n+1)}(c_1) \leq f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(c_2)$

$$t \leq x \implies x-t \geq 0 \implies \frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$$

$$f^{(n+1)}(c_1) \frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(c_2) \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

$$f^{(n+1)}(c_1) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq f^{(n+1)}(c_2) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

$$\text{Or, } \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{1}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x$$

D'où

$$f^{(n+1)}(c_1) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq f^{(n+1)}(c_2) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$f^{(n+1)} \leq \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq f^{(n+1)}(c_2).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à

$$f^{(n+1)} \implies \exists c \in [a, x] \text{ tel que } \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(c) \quad \square$$

2.1 Application

On peut se servir des formules de Taylor avec reste intégral ou de Taylor-Lagrange pour obtenir des encadrements de f par des polynomes

Exemple 1 (Exemple). Montrer que :

$$\forall x \geq 0, 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$a = 0, n = 2$$

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\cos$ qui est bien de classe C^3 sur $\mathbb{R}$

Il existe $c \in [0, x]$ tel que :

$$\cos(x) = \cos(0) + \frac{\cos'(0)}{1} x + \frac{\cos^{(2)}(0)}{2} x^2 + \frac{x^3}{3!} \cos^{(3)}(c).$$

$$\implies \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin(c).$$

$$-1 \leq \sin(c) \leq 1$$

$$\text{Comme } x^3 \geq 0, \text{ on a } -\frac{x^3}{6} \leq \frac{x^3}{6} \sin(c) \leq \frac{x^3}{6}$$

$$\text{Donc, } \boxed{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6}}$$

Théorème 3 (Formule de Taylor-Young). Soit f de classe C^{n+1} sur $I, a \in I$. Alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x).$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve. On applique Taylor-Lagrange :

Fixons $x \in I$. Alors $\exists c \in [a, x]$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = (x-a)^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\text{Donc, } \varepsilon(x) = \frac{x-a}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

□

Définition 2 (Développements limités). Soit $I =]\alpha, \beta[, a \in I, n \in \mathbb{N}, f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a , abrégé DL (a, n)

Si $\exists c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x).$$

$$\text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Théorème 4. Si $f \in C^{n+1}(I), a \in I$. Alors f admet un DL (a, n)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x).$$

Remarque

i. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$. f est dérivable en $a \iff f$ admet un DL $(a, 1)$

Si f admet un FL à l'ordre A en $a, f(x) = c_0 + c_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_0 = f(a) \implies f \text{ est continue en } a$$

$$\implies \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c_1$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } f(x) &= x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\
f &\text{ admet un DL } (0, 2) \\
f(x) &= x^2 \varepsilon(x), \varepsilon(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
f'(x) &= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
f''(x) &= 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \times \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

2.2 DL usuels à connaître par coeur

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + x^n \varepsilon(x) = 1 + x + x^2 + x^n \varepsilon(x) \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

2.3 Opérations sur les DL

Somme et produit d'un DL par une constante

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x)$ deux fonctions qui admettent un DL en 0 à l'ordre n . Alors, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL en 0 à l'ordre n donné par

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Exemple 2. *Quelques exemples de somme de DL*

$$f(x) = \ln(1+x) + e^x. \text{ DL } (0, 4)?$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} \varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\implies f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

Produit de DL

Théorème 5. Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ alors fg admet un DL en 0 à l'ordre n donné par

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Exemple 3 (Exemple). Calculer le DL en 0 à l'ordre 5 de $f(x) = (2 + 4 \cos(x)) \sin(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$2 + 4 \cos(x) = 2 + 4 - 2x^2 + \frac{x^4}{6} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$f(x) = \left(6 - 2x + \frac{x^4}{6} + x^5 \varepsilon(x) \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) \right)$$

$$= 6x - x^3 + \frac{x^5}{20} - 2x^3 + \frac{x^5}{6} + x^5 \varepsilon(x)$$

Quotient de DL Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon(x)$

Si $b_0 \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un DL $(0, n)$ obtenu par la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n du polynôme $a_0 + a_1 + \dots + a_n x^n$ par le polynôme $b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

Après avoir fait ça, on obtient $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon(x)$

Exemple 4 (Exemple). $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$, $x \neq k\pi$, $x > -1$, $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)}{x + x^2 \varepsilon(x)}$$

Ici, on ne peut rien faire car le dénominateur commence par 0. On réécrit donc le DL à l'ordre $n+1$ et on factorise par x

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)}{x - \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon(x)} = \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}x^2 x^2 \varepsilon(x) \right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \right)}$$

On fait la division désormais, et on obtient : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$

Si on pose $f(0) = 1$, f se prolonge par continuité en 0 et f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

Composition de fonctions Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - b_0)^k + x^n \varepsilon(x)$, $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon(x)$

Alors $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n en remplaçant le DL de g dans celui de f et en gardant que les termes de degré $\leq n$

Exemple 5. Calculer le DL en 0 à l'ordre 5 de $f(x) = \sin(x^2)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

Exemple 6. $f(x) = e^{\cos(x)}$. DL en 0 à l'ordre 2

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} \\ &= e \times e^{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} \\ &= e \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \right) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + xsr\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Primitive d'un DL Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ admet un DL en 0 à l'ordre n et si F est une primitive de f au voisinage de 0, alors F admet un DL en 0 à l'ordre $n+1$ donné par :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + x^{n+1} \varepsilon(x).$$

Preuve. $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)}{x^n}, x \neq 0$

$$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc ε se prolonge en une fonction continue au voisinage de 0

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + t^n \varepsilon(x) \\ \implies \int_0^x f(t) dt &= \underbrace{\int_0^x (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) dt}_{a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}} + \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\int_0^x t^n \varepsilon(t) dt = x^{n+1} \tilde{\varepsilon}(x)$

$$\text{où } \tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Supposons $x > 0$

Par continuité de ε , $\exists t_1, t_2 \in [0, x]$ tel que : $\forall t \in [0, x], \varepsilon(t_1) \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon(t_2)$

$$\implies \varepsilon(t_1) t^n \leq t^n \varepsilon(t) \leq t^n \varepsilon(t_2)$$

$$\implies \varepsilon(t_1) \int_0^x t^n dt \leq \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon(t_2) \int_0^x t^n dt$$

$$\implies \varepsilon(t_1) \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon(t_2) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc, $\exists c_x \in [0, x]$ tel que :

$$\int_0^x t^n \varepsilon(t) dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \varepsilon(c_x).$$

$$c_x \mapsto 0 \quad \implies \quad \tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon(c_x) \mapsto \varepsilon(0) = 0$$

$x \mapsto 0^+ \qquad \qquad \qquad \mapsto 0^+$

□

Exemple 7. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ DL de f en 0 à l'ordre 3

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x) \text{ Donc, } \ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

3 Obtenir un DL en un point $x_0 \neq 0$

On pose le changement de variable :

$$u = x - x_0.$$

Exemple 8. Calculer le FL de $f(x) = \ln(x)$ en $x_0 = e$ à l'ordre 3

On pose $u = x - e$, i.e. $x = u + e$

$$f(x) = \ln(u + e) = \ln\left(e \left(1 + \frac{u}{e}\right)\right)$$

$$= \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{u}{e}\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{u}{e}\right)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^3 \varepsilon(t)$$

$$\implies \ln\left(1 + \frac{u}{e}\right) = \frac{u}{e} - \frac{u^2}{2e^2} + \frac{u^3}{3e^3} + u^3 \varepsilon(u)$$

$$\implies f(x) = 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} + \frac{(x-e)^3}{3e^3} + (x-e)^3 \varepsilon(x)$$

4 Applications des DL

- i. Calcul de limites
- ii. étude d'une tangente en un point x_0
- iii. étude des asymptotes en l'infini

4.1 Application des DL au calcul de limites

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x(e^x - 1 - x)}$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\text{D'où : } \frac{\sin(x) - x}{x(e^x - 1 - x)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)}{\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)}$$

$$\text{Donc, } \frac{\cancel{x^3}(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x))}{\cancel{x^3}(\frac{1}{2} + \varepsilon(x))} \xrightarrow{x \mapsto 0} -\frac{1}{3}$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) + 1 - x}{e^x - e - e(x-1)}$

Faisons le changement de variable $u = x - 1$, c'est-à-dire $x = u + 1$

$$\implies \frac{\ln(1+u) - u}{e^{u+1} - e - eu} = \frac{\ln(1+u) - u}{e(e^u - 1 - u)}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$

$$\frac{\ln(x) + 1 - x}{e^x - e - e(x-1)} = \frac{-\frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(x)}{\frac{u^2}{2}\varepsilon(u)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} -\frac{1}{e}$$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)^x$

Indéterminé :(

On effectue le changement de variable

$$u = \frac{1}{x}.$$

$$\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)^x = e^{x \ln(\cos(\frac{1}{x}))} = e^{\frac{1}{u} \ln(\cos(u))}$$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$

$$\ln(\cos(u)) = \ln\left(1 - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

$$\ln(1+t) = t + t\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \ln(\cos(u)) = -\frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} \ln(\cos(u)) = -\frac{u}{2} + u\varepsilon(u)$$

$$\text{Donc, } \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

4.2 Application des DL à l'étude des tangentes

$$\begin{array}{ll}]-1, 1[& \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \\ \text{Exemple 9. } f : & x \xrightarrow{\quad} f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Etude de f au voisinage du point $(0, 1)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \frac{x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x) \right)}{x \left(1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x) \right)}$$

En effectuant la division, on obtient que :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$$

Soit Δ la droite d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$

$$\text{Donc, } f(x) - \left(1 + \frac{x}{2} \right) = \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$$

Donc, Δ est tangente à C_f au point $(0, 1)$

De plus,

$$\frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon(x) = x^2 \left(\frac{1}{3} + \varepsilon(x) \right) \mapsto \frac{1}{3}.$$

Au voisinage de 0

Donc, $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est du signe de x^2 , c'est-à-dire positif

Donc, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente

Exemple 10. $f : \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\begin{array}{l} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{1+x} \end{array}$

Etude de f au voisinage de 0

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3 \varepsilon(t)$$

$$\implies \ln(1-2x) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

$$f(x) = \left(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \right) (1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)).$$

$$f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x).$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes pour $x > 0$ et au dessus pour $x < 0$