

Chapitre 8 : Equations différentielles

Romann Szczepaniak

April 28, 2025

1 Généralités

Définition 1. Vocabulaire

i. Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation du type :

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = g(x).$$

où $a_0, \dots, a_n$ et g sont des fonctions continues sur un intervalle I et y d'inconnues qu'on suppose au moins n fois dérivable et a_n non identiquement nulle

ii. L'équation (E) est dite homogène si $\forall x \in I, g(x) = 0$

iii. (E) est dite à coefficients constants si les coef a_i sont des fonctions constantes

Dans ce chapitre, on va étudier deux types d'équations différentielles : linéaire d'ordre 1 et linéaire à coefficients constants d'ordre 2

Théorème 1 (Principe de linéarité). Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) $a_0(x)y(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = 0$ alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution de (E)

Remarque : Comme $y(x) = 0, \forall x \in I$ est solution de (E) , le principe de linéarité dit que l'espace des solutions de (E) forme un espace vectoriel

Preuve. $\forall 0 \leq k \leq n, (\lambda y_1 + \mu y_2)^{(k)}(x) = \lambda y_1^{(k)}(x) + \mu y_2^{(k)}(x)$

Si on remplace y par $\lambda y_1 + \mu y_2$:

$$\lambda \left(a_0 y_1(x) + \cdots + a_n y_1^{(n)}(x) \right) + \left(a_0(x) y_2(x) + \cdots + a_n(x) y_2^{(n)}(x) \right) = 0.$$

□

Théorème 2 (Principe de superposition). Soit (E) $a_0(x)y(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = g(x)$ et (E_h) l'équation différentielle homogène associée, alors l'ensemble des solutions de (E) est donné par les fonctions qui s'écrivent sous la forme : $y(x) = y_n(x) + y_0(x)$ où y_0 est une solution particulière de (E) et y_n une solution quelconque de (E_h)

Preuve. Soit y une fonction n fois dérivable sur I et y_0 une solution particulière de (E) . y est solution de (E) ssi $a_0(x)y(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = g(x) \iff a_0(x)y(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = a_0(x)y_0(x) + \cdots + a_n(x)y_0^{(n)}(x) \iff a_0(x)(y - y_0) + \cdots + a_n(x)(y - y_0) = 0 \iff y - y_0$ est une solution de (E_h)

□

2 Méthode générale

- i. On va chercher une base de l'espace des solutions de (E_h)
- ii. On cherche une solution particulière de (E)
- iii. On applique le principe de superposition pour en déduire que l'espace des solutions de (E) est $\{y_n(x) + y_0(x) : y_n \text{ solution de } (E_h)\}$

3 Equations différentielles d'ordre 1

$(E) a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$ avec a_0, a_1, g continues sur I et a_1 non identiquement nulle. On suppose que $\forall x \in I, a_1(x) \neq 0$

$$y'(x) + \frac{a_0}{a_1} y(x) = \frac{g(x)}{a_1}.$$

et on est ramenés à une E.D. de la forme : $y'(x) + b_0 y(x) = h(x)$ avec b_0, h continues sur I

Exemple 1 (Exemple).

$$(E) (1-x)y'(x) + x^2 y(x) = e^x.$$

On résoud donc $y'(x) + \frac{x^2}{1-x} y(x) = \frac{e^x}{1-x}$ sur $I_1 =]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

Théorème 3. Soit I un intervalle, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et A une primitive de a sur I . Les solutions de l'E.D. $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ sont données par : $y_k(x) = ke^{-A(x)}, k \in \mathbb{R}$

Preuve. Posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$ où y est dérivable sur $I \implies z$ est dérivable sur $I, z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)A'(x)e^{A(x)} = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}$

Donc y est solution de $(E) \iff y'(x) + a(x)y(x) = 0 \forall x \in I \iff z'(x) = 0 \iff z$ est constante $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, z(x) = k \iff y(x)e^{A(x)} = k \iff y(x) = ke^{-A(x)} \quad \square$

Proposition 1 (Corollaire). Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I intervalle. Alors l'ensemble des solutions de $y' + ay = g$ est donné par :

$$y(x) = ke^{-A(x)} + y_0(x).$$

où A est une primitive de a, y_0 solution particulière de (E)

Preuve. Découle du théorème précédent et principe de superposition $\square$

Exemple 2. $(1+x^2)y' + y = 1$ $(E) \iff y' + \frac{1}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$

...

3.1 Rappel

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x) \quad (E).$$

où a, g continues sur I

i. 1ère étape : $y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad (E_h)$

Théorème : l'ensemble des solutions de (E_h) est donné par : $y_k(x) = ke^{-A(x)}$, $k \in \mathbb{R}$ et A primitive de a

ii. 2e étape : On cherche une solution particulière de (E) , càd $y_0(x)$

Principe de superposition : Les solutions de (E) sont données par $y(x) = ke^{-A(x)} + y_0(x)$, $k \in \mathbb{R}$

Pour chercher une solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante. On cherche la solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = k(x)e^{-A(x)}.$$

Où k est une fonction dérivable sur I On a : $y'_0(x) = k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)}$

y_0 est une solution de $(E) \iff$

$$\iff y'_0(x) + a(x)y_0(x) = g(x)$$

$$\iff k'(x)e^{-A(x)} + \underbrace{k(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)}}_{=0} = g(x)$$

$$\iff k'(x) = g(x)e^{A(x)} \quad (*)$$

Comme $x \mapsto g(x)e^{A(x)}$ est une fonction continue sur I , l'équation $(*)$ admet une solution. Donc, il existe bien une solution particulière de (E) sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{-A(x)}$

Exemple 3 (Exemple). Résoudre $(E) \quad ty' + |t|y = t^2e^{e|t|}$, avec (E) sur $\mathbb{R}$

$$(E_h) \quad ty' + |t|y = 0.$$

On se place d'abord sur $]0, +\infty[$

$$(E_h) \iff y' + y = 0$$

D'après le théorème du cours, les solutions de (E_h) sont données par $y_k(t) = ke^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$, $t > 0$

On cherche maintenant une solution particulière y_0 de (E) sur $]0, +\infty[$ sous la forme : $y_0(t) = k(t)e^{-t}$ où k est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$

$$y'_0(t) = k'(t)e^{-t}.$$

y_0 est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ ssi :

$$\begin{aligned} tk'(t)e^{-t} - tk(t)e^{-t} + tk(t)e^{-t} &= t^2e^{-t} \\ \iff k'(t)e^{-t} &= te^{-t} \\ \iff k'(t) &= t \\ \iff k(t) &= \frac{t^2}{2} + c \end{aligned}$$

Donc, $y_0(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}$ est une solution particulière de (E)

$\implies$ Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont :

$$y(t) = ke^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}, t > 0, k \in \mathbb{R}.$$

Plaçons nous ensuite sur $]-\infty, 0[$.

$$y(t) = ke^t + \frac{t^2}{2}e^t, k \in \mathbb{R}, t < 0$$

Recherche de solutions sur $\mathbb{R}$

Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$

Alors y est une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

Donc, il existe deux constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$y(t) = \begin{cases} k_1e^t + \frac{t^2}{2}e^t, & t < 0 \\ k_2e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}, & t > 0 \end{cases}.$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(t) = k_1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(t) = k_2$

y continue en 0 $\implies k_1 = k_2$ et $y(0) = k_1$

Dérivabilité en 0 ? :

$$\text{Pour } t < 0 : \frac{y(t) - y(0)}{t} = \frac{k_1e^t + \frac{t^2}{2}e^t - k_1}{t} = k_1 \frac{e^t - 1}{1} + \frac{t}{2}e^t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} k_1$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t} = k_1$$

$$\text{Pour } t > 0 : \frac{y(t) - y(0)}{t} = \frac{k_1e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t} - k_1}{t} = k_1 \frac{e^{-t} - 1}{t} + \frac{t}{2}e^{-t}$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t} = -k_1$$

Donc, y dérivable en 0 $\implies -k_1 = k_1 \implies k_1 = 0$

$$\text{Conclusion : } y \text{ solution de (E)} \implies y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}e^t, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

$$\implies y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$$

Synthèse : On vérifie que $y\{t\}$ est bien une solution de (E)

Théorème 4 (de Cauchy-Lipschitz). Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Alors, $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$

Exemple 4 (Exemple 1). Résoudre $(E) \quad \begin{cases} y'(t) + e^t y(t) = 0, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que (E) admet comme unique solution $y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$

Preuve. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$ où A est la primitive de a qui s'annule en x_0 $\left(A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt \right)$

$$y(x) = z(x)e^{-A(x)}.$$

$$y'(x) = z'(x)e^{-A(x)} - z(x)a(x)e^{-A(x)}.$$

Donc, y est solution de $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z'(x)e^{-A(x)} - \underbrace{z(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)}}_{=0} = b(x)z(x_0)e^{-A(x_0)} = y_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z'(x)b(x)e^{A(x)} \\ z'(x_0) = y_0 e^{A(x_0)} \end{cases} \quad (*)$$

$(*)$ est une unique solution donnée par :

$$z(x) = y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \quad \left(\implies z(x) - z(x_0) = \int_{x_0}^x z'(t) dt \right).$$

□

4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$(E) \quad ay'' + by' + cy = g$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et g continue sur I .

$$(E_h) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

On regarde si $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ peut être solution de $(E) \implies y'(x) = re^{rx} \implies y''(x) = r^2 e^{rx}$

D'où y est la solution de (E_h) si, et seulement si :

$$\begin{aligned} ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ \iff (ar^2 + br + c) e^{rx} &= 0 \\ \iff ar^2 + br + c &= 0 \end{aligned}$$

On est donc conduit à étudier l'équation dite caractéristique associée à (E) , notée (E_c)

$$(E_c) = ar^2 + br + c = 0, r \in \mathbb{C}.$$

Théorème 5. *L'ensemble $S(E_h)$ des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. De plus :*

i. Si $\Delta > 0$, alors (E_c) admet deux solutions réelles $r_1, r_2, r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_h) sont données par :

$$y_h(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}.$$

ii. Si $\Delta = 0$, alors (E_c) admet une unique solution $r_1 \in \mathbb{R}$. Alors les solutions de (E_h) :

$$y_h(x) = (k_1 x + k_2) e^{r_1 x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

iii. Si $\Delta < 0$, alors (E_c) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Alors les solutions de (E_h) sont données par :

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)), k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\implies y_h(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

Théorème 6. $y(x) = e^{r_1 x}$ est solution de $(E_h) \iff r_1$ est solution de $(E_c) \iff ar_1^2 + br_1 + c = 0$

Preuve. On considère r_1 une solution de (E_c) (Eventuellement complexe) et on pose $y(x) = z(x) e^{r_1 x}$ où z est deux fois dérivable

$$y'(x) = z'(x) + r_1 z(x) e^{r_1 x}$$

$$\text{et } y''(x) = z''(x) e^{r_1 x} + 2 \times z'(x) r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 z(x) e^{r_1 x}$$

D'où : y est solution de (E_h) si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0 &= ay''(x) + by'(x) + cy(x) \\ &= a(z''(x) e^{r_1 x} + 2r_1 z'(x) e^{r_1 x} + r_1^2 z(x) e^{r_1 x}) \\ &\quad + b(z'(x) e^{r_1 x} + r_1 z(x) e^{r_1 x}) \\ &\quad + cz(x) e^{r_1 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{e^{r_1 x}}_{\neq 0} (az''(x) + 2ar_1 z'(x) + ar_1^2 z(x) + bz'(x) + br_1 z(x) + cz(x)) \\ \iff 0 &= az''(x) + (2ar_1 + b) z'(x) + \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0 \text{ car } ar_1^2 + br_1 + c = 0} z(x) \end{aligned}$$

y est solution de (E_h) si et seulement si $0 = az''(x) + (1ar_1 + b)z'(x), a \neq 0$

$$\iff z''(x) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)z'(x) = 0$$

$$\implies \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)z(x) = k$$

Parenthèse sur les solutions de (E_c)

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Si r_1, r_2 les "deux" solutions de (E_c) dans $\mathbb{C}$ alors :

$$ar^2 + br + c = a(r - r_1)(r - r_2).$$

On obtient en développant et en identifiant :

$$ar_1r_2 = c \iff r_1r_2 = \frac{c}{a}$$

$$-a(r_1 + r_2) = b \iff r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2r_1 + \frac{b}{a} = 0 \iff 2r_1 - (r_1 + r_2) = 0 \iff r_1 - r_2 = 0 \iff r_1 = r_2$$

Si $\Delta = 0$

Alors $r_1 = r_2$ et on a une solution double et $2r_1 + \frac{b}{a} = 0$. on obtient alors :

y est solution de (E_h) si et seulement si $z'(x) = k, i.e., z(x) = kx + k_1$ avec $k, k_1 \in \mathbb{R}$. D'où

$$\boxed{y(x) = (kx + k_1)e^{r_1x}, k, k_1 \in \mathbb{R}}$$

Si $\Delta > 0$

on a deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 de (E_c)

et $\lambda = 2r_1 + \frac{b}{a} \neq 0$ y est solution de (E_h) si et seulement si :

$$z'(x) + \lambda z(x) = k.$$

Les solutions de $z'(x) + \lambda z(x) = 0$ sont $z_k(x) = k_1e^{-\lambda x}$ et $z_0(x) = \frac{k}{\lambda}$ est une solution particulière, d'où :

$$z(x) = k_1e^{-\lambda x} + \frac{k}{\lambda}.$$

$$\text{D'où : } y(x) = z(x)e^{r_1x} = \left(k_1e^{-\lambda x} + \frac{k}{\lambda}\right)e^{r_1x} = k_1e^{(r_1-\lambda)x} + \frac{k}{\lambda}e^{r_1x}$$

$$\text{On a aussi : } r_1 - \lambda = r_1 - \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) = -r_1 - \frac{b}{a} = r_2$$

$$\implies y(x) = k_1e^{r_2x} + \frac{k}{\lambda}e^{r_1x} = \lambda e^{r_2x} + \mu e^{r_1x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

□

Exemple 5 (Exemple). Résoudre $y'' - y = 0$

On écrit l'équation caractéristique associée :

$$(E_c) \quad r^2 - 1 = 0.$$

Les solutions de (E_c) sont $r_1 = 1, r_2 = -1$

Le théorème nous dit que les solutions de (E_h) sont :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6 (Exemple). Résoudre (E_h) $y'' + y' + y = 0$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

On a $\Delta = -3 < 0$

Une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$

Les solutions de (E_c) sont $r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Le théorème du cours nous dit que les solutions de (E_h) sont données par :

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Question : Comment résoudre

$$(E) \quad ay'' + by' + xy = g(x).$$

Où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et g continue sur $\mathbb{R}$

Par le principe de superposition, on sait que les solutions générales de (E) sont données par :

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x).$$

où y_0 est une solution particulière de (E) et y_h est une solution générale de (E_h)

Comment trouver une solution particulière ?

Premier cas particulier : Si le second membre $g(x)$ est de la forme $g(x) = e^{\alpha x} P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme

Théorème 7. Soit

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = P(x) e^{\alpha x}.$$

où $\alpha \neq 0, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme

Alors (E) admet une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = Q(x) e^{\alpha x}.$$

i. Si s n'est pas une solution de (E_c) ($as^2 + bs + c \neq 0$) Q est un polynôme tel que $\deg(P) = \deg(Q)$

ii. si s est une racine simple de E_c alors $\deg(Q) = \deg(P) + 1$

iii. Si s est une racine double de (E_c) , alors $\deg(Q) = \deg(P) + 2$

Exemple 7 (Exemple). Résoudre (E) $y'' + y' - 2y = e^x$

L'équation homogène associée est :

$$(E_h) \quad y'' + y' - 2y = 0.$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(E_c) \quad r^2 + r - 2 = 0.$$

$$\Delta = 9 \implies r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, r_2 = -2$$

Par le théorème du cours, les solutions de (E_h) sont données par :

$$y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière

On cherche la solution particulière sous la forme $y_0(x) = e^x(ax + b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{On dérive : } y_0'(x) e^x (ax + b) + ae^x = (ax + a + b) e^x$$

$$y_0''(x) = e^x(ax + a + b) + e^x a = e^x(ax + 2a + b)$$

y_0 est une solution de (E) ssi

$$e^x(ax + 2a + b) + (ax + a + b) - 2(ax + b)e^x = e^x.$$

ssi

$$ax + 2a + b + ax + a + b - 2ax - 2b = 1.$$

ssi

$$3a = 1 \implies a = \frac{1}{3}.$$

Une solution particulière de (E) est donnée par

$$y_0(x) = \frac{1}{3}xe^x.$$

Par le principe de superposition, les solutions de (E) sont :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Montrons que si s n'est pas une racine de (E_c) alors on peut toujours trouver une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_0(x) = Q(x) e^{sx}, \text{ où } \deg(Q) = \deg(P).$$

On dérive comme des gros singes :

$$y_0'(x) = Q'(x) e^{sx} + sQ(x) e^{sx} = e^{sx}(Q'(x) + sQ(x))$$

$$y_0''(x) = (Q''(x) + sQ'(x)) e^{sx} + s(x'(x) + sQ(x)) e^{sx}$$

$$y_0''(x) = (Q''(x) + 2sQ'(x) + s^2Q(x)) e^{sx}$$

D'où y_0 est une solution de (E) ssi :

$$a(Q''(x) + 2sQ'(x) + s^2Q(x))e^{sx} + b(Q'(x) + sQ(x))e^{sx} + cQ(x)e^{sx}.$$

ssi

$$aQ''(x) + 2asQ'(x) + as^2Q(x) + bQ'(x) + brQ(x) + cQ(x) = P(x).$$

$\iff$

$$aQ''(x) + (2as + b)Q'(x) + (as^2 + bs + c)Q(x) = P(x).$$

Comme s n'est pas une racine de (E_c) , alors :

$$as^2 + bs + c \neq 0.$$

Notons : $N = \deg(P) \in \mathbb{N}$

On considère

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] & \longmapsto & \mathbb{R}_N[X] \\ \phi : Q(x) & \longmapsto & aQ''(x) + (2as + b)Q'(x) + (as^2 + bs + c)Q(x) = P(x) \end{array}$$

ϕ est linéaire

On montre que $\ker(\phi) = \{0\}$, donc ϕ est injective donc surjective

Ainsi si $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on sait qu'il va existe $Q \in \mathbb{R}_N[x]$ tel que $\phi(Q) = P$, c'est-à-dire :

$$aQ''(x) + (2as + b)Q'(x) + (as^2 + bs + c)Q(x) = P(x).$$

□

4.1 Cas particulier

$$g(x) = e^{sx}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$$

Théorème 8. *L'équation $y'' + by' + gy = g(x)$ (E) admet une solution particulière y_0 sous la forme suivante :*

$$y_0(x) = e^{sx}x^m(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)).$$

où Q_1, Q_2 deux polynômes de degré $n = \max(\deg(P_1), \deg(P_2))$

et $m = \begin{cases} 0 & \text{si } s + i\beta \text{ n'est pas racine de } (E_c) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple 8 (Exemple). Résoudre $y'' + y = 2\cos(x)^2$ (E)

$$y'' + y = 0 \quad (E_h).$$

$$r^2 + 1 = 0 \quad (E_c).$$

Première étape : résolution de E_h

$$r^2 + 1 = 0 \iff r = i \text{ ou } -i$$

Les solutions de (E_h) sont données par :

$$y_0(x) = e^{0x} (\lambda \cos(1x) + \mu \sin(1x)).$$

$$D'où \boxed{y_h(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Deuxième étape : recherche d'une solution particulière

$$\text{On remarque que } 2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$D'où (E) \iff y'' + y = 1 + \cos(2x)$$

$$\text{On regarde d'abord } y'' + y = 1 \implies y_0(x) = 1 \text{ est une solution particulière de } y'' + y = 1$$

$$\text{On regarde ensuite } y'' + y = \cos(2x)$$

$$\text{On a : } \cos(2x) = e^{0x} (1 \times \cos(2x) + 0 \times \sin(2x))$$

On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_1(x) = e^{0x} x^m (Q_1(x) \cos(2x) + Q_2(x) \sin(2x)).$$

Avec Q_1, Q_2 deux polynômes de degré $n = 0$ et $m = 0$ car $2i$ n'est pas une solution de (E_c)

$$\text{On a donc : } y_1(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$$

$$y_1'(x) = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$$

$$y_1''(x) = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$$

D'où y_1 est solution de $y'' + y = \cos(2x)$ ssi :

$$y_1'' + y = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x) + a \cos(2x) + b \sin(2x) = \cos(2x).$$

$$\iff -(1+3a) \cos(2x) - 3b \sin(2x) = 0$$

$$\begin{cases} -(1+3a) = 0, x = 0 \\ -3b = 0, x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \implies a = -\frac{1}{3}, b = 0$$

$$\text{Donc } y_1(x) = -\frac{1}{3} \cos(2x) \text{ est une solution particulière de } y'' + y = \cos(2x)$$

$$\text{Conclusion : } y_2(x) = y_0(x) + y_1(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos(2x) \text{ est une solution particulière de (E)}$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$\boxed{y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + 1 - \frac{1}{3} \cos(2x), \lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$

4.2 Trouver une solution particulière

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E).$$

Pour trouver une solution particulière de (E) , on peut aussi appliquer la méthode de la variation de la constante qui consiste à chercher une solution particulière sous la forme :

$$\begin{cases} y_0(x) = \lambda(x) e^{r_1 x} + \mu(x) e^{r_2 x} \text{ si } \Delta > 0 \\ y_0(x) = (x\lambda(x) + \mu(x)) e^{r_1 x} \text{ si } \Delta = 0 \\ y_0(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \text{ où } \alpha + i\beta \text{ racine de } (E_c) \text{ si } \Delta < 0 \end{cases}.$$

Avec r_1, r_2 les racines de (E_c) et $x \mapsto \lambda(x)$ et $x \mapsto \mu(x)$ sont des fonctions deux fois dérivables

Exemple 9 (Exemple). Résoudre $y'' + y = 2 \cos^2(x)$

Etape 1 : Les solutions de (E_h) sont de la forme :

$$y_h(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Etape 2 : pour chercher la solution particulière, on va appliquer la méthode de la variation de la constante et donc la chercher sous la forme :

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x).$$

On dérive :

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= \lambda'(x) \cos(x) - \lambda(x) \sin(x) + \mu'(x) \sin(x) + \mu(x) \cos(x) \\ &= \underbrace{\lambda' \cos(x) + \mu' \sin(x)}_{\text{On prend } =0} - \lambda(x) \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

$$y_0''(x) = -\lambda(x) \sin(x) - \lambda(x) \cos(x) + \mu'(x) \cos(x) - \mu(x) \sin(x).$$

On cherche $\lambda(x), \mu(x)$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda'(x) \cos(x) + \mu'(x) \sin(x) = 0 \\ \cancel{\lambda(x) \cos(x)} + \cancel{\mu(x) \sin(x)} - \lambda'(x) \sin(x) + \mu'(x) \cos(x) + \cancel{\lambda(x) \cos(x)} \\ \quad \quad \quad \cancel{-\mu(x) \sin(x)} = 2 \cos^2(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \lambda'(x) \cos(x) + \mu'(x) \sin(x) = 0 \\ -\lambda'(x) \sin(x) + \mu'(x) \cos(x) = 2 \cos^2(x) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \mu'(x) \overbrace{(\sin^2(x) + \cos^2(x))}^{=1} = 2 \cos^3(x) \\ \lambda'(x) \underbrace{(\cos^2(x) + \sin^2(x))}_{=1} = -2 \cos^2(x) \sin(x) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \mu'(x) = 2 \cos^3(x) \\ \lambda'(x) = -2 \cos^2(x) \sin(x) \end{cases} \end{aligned}$$

5 Parenthèse culturelle

Equation de Bernoulli : $y' = a(x)y + b(x)y^n, n \in \mathbb{Z}/\{0, 1\}$

$y_0(x) = 0$ est solution de (E)

On cherche les solutions qui ne s'annulent pas

$$(E) \iff \frac{y'(x)}{y^n(x)} = \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x)$$

Posons $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)} = y^{1-n}(x)$

On a donc $z'(x) = (1-n)y^{1-n-1}(x)y'(x) = \frac{(1-n)}{y^n(x)}y'(x)$

$$(E) \iff \frac{1}{1-n}z'(x) = a(x)z(x) + b(x)$$

z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on sait résoudre

Exemple 10 (Exemple). Résoudre (E) $y' = y^3 - \frac{y}{x}$ sur $]0, +\infty[$

On suppose que y ne s'annule pas

$$(E) \iff \frac{y'(x)}{y^3(x)} = 1 - \frac{1}{xy^2(x)}$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)} = y^{-2}(x)$

Donc $z'(x) = -2y^{-3}y'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}$

$$(E) \iff -\frac{1}{2}z'(x) = 1 - \frac{1}{x}z(x) \iff z'(x) - \frac{2}{x}z(x) = -2$$

Les solutions de

$$z'(x) - \frac{2}{x}z(x) = 0.$$

sont : $z_h(x) = ke^{-\int -\frac{2}{x}dx} = ke^{2\ln(2)} = kx^2$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$z_0(x) = k(x)x^2.$$

$$z'_0(x) = k'(x)x^2 + 2xk(x).$$

On a alors : $k'(x)x^2 + \cancel{2xk(x)} - \cancel{\frac{2}{x}k(x)x^2} = -2$

$$\iff k'(x) = -\frac{2}{x}. \text{ On peut prendre } k(x) = \frac{2}{x}$$

On a donc : $z(x) = kx^2 + \frac{2}{x}x^2 = kx^2 + 2x$

D'où $y^2(x) = \frac{1}{kx^2 + 2x}, k \in \mathbb{R}$