CM 1 : Maths

Chapitre 1 : Géométrie plan-espace.

· Suppositions :

· Le plan est muni d'un Repère orthonormé direct $\mathcal{R}_2 = (O; \vec{i}; \vec{j})$

· L'espace est muni d'un ROND $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$

· Rappels :

$\vec{u}; \vec{v} \in \mathcal{R}_2$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} \\ \vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} \end{cases}$

$\vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}.\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$.

$\vec{u}; \vec{v} \in \mathcal{R}_3$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{cases}$

$\vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}.\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff \vec{u}.\vec{v} = 0$.

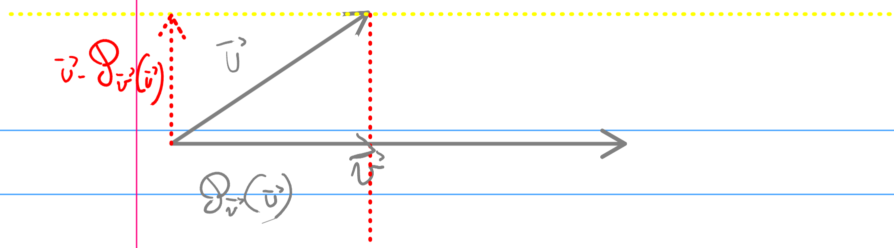
· Projeté orthogonal d'un vecteur sur un autre.

Si $\vec{u}; \vec{v} \in \mathcal{R}_1$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

Définition : Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est l'unique vecteur noté $P_{\vec{v}}(\vec{u})$ tel que.

(i) $P_{\vec{v}}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{v}$

(ii) $\vec{u} - P_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \vec{v}$



Théorème Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}_n$ avec $\vec{v} \neq 0$, alors $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \times \vec{v}$

Preuve.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda \vec{v} \Rightarrow \vec{u} - P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} - \lambda \vec{v}$$

$$\vec{u} - P_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \vec{v} \iff (\vec{u} - \lambda \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v} - \lambda \vec{v}\cdot\vec{v}$$

Comme $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$, on a

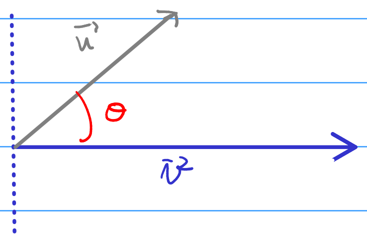
$$\vec{u}\cdot\vec{v} - \lambda\|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \Rightarrow \boxed{P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}}$$

Théorème :

$\forall \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}_n$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \text{ avec } \theta = (\widehat{\vec{u};\vec{v}}).$$

Preuve.



1er cas : $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

* $\theta = 0$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de m̂ sens.

$\vec{u} = \lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$.

$\vec{u}.\vec{v} = \lambda \vec{v}.\vec{v} = \lambda \|\vec{v}\|^2.$

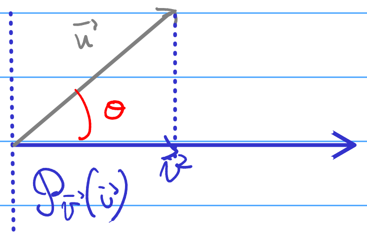
$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = \|\lambda\vec{v}\| \|v\| \cos(0) = \lambda \|\vec{v}\|^2$ car $\lambda > 0$

* $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$

On a $\vec{u} \perp \vec{v}$, donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$

D'autre part, $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = 0$ car $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

* $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\theta \neq 0$.



Donc $\cos\theta = \frac{\|P_{\vec{v}}(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|}$

D'après le Th 1, on sait que $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.\vec{v}$

Donc $\|P_{\vec{v}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|\vec{v}\|}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $P_{\vec{v}}(\vec{u})$ sont dans le m̂ sens donc $\vec{u}.\vec{v} > 0$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta.$

Déterminant dans le plan.

Soient $\vec{u};\vec{v} \in \mathbb{R}_2$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

Le réel $\det(\vec{u};\vec{v})$ défini par :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Exercice :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ déterminant nul.

Théorème

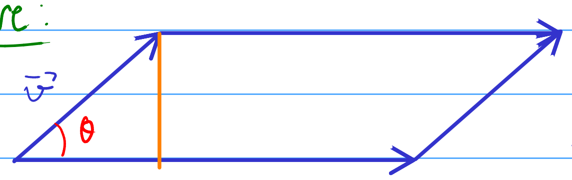
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace et notons $S_{\vec{u},\vec{v}}$ le parallélogramme de côté $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

① . $\text{Aire}(S_{\vec{u};\vec{v}}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin\theta|$ où $\theta = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

② Dans le plan, $\text{Aire}(S_{\vec{u};\vec{v}}) = |\det(\vec{u};\vec{v})| = |\vec{u}.\vec{v}^{\perp}|$ où, si $\vec{v}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, alors $\vec{v}^{\perp}\begin{pmatrix}-b_2\\b_1\end{pmatrix}$.

Preuve :

①.



$\text{Aire}(S_{\vec{u},\vec{v}})$ = base × hauteur.

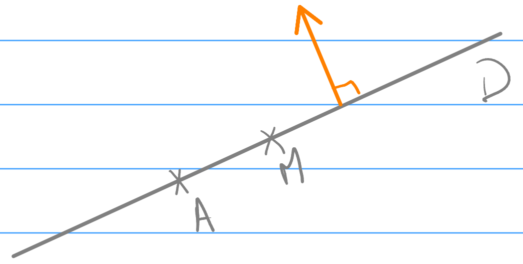
$= \|\vec{v}\|\,\|\vec{u} - P_{\vec{v}}(\vec{u})\|$

$$|\sin\theta| = \frac{\|\vec{u} - P_{\vec{v}}(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|}$$, D'où

$$\text{Aire}(S_{\vec{u},\vec{v}}) = \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|\,|\sin\theta|$$

Equation cartésienne d'une droite dans le plan.

Si D une droite du plan passant par $A(\alpha;\beta)$
de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq\vec{0}$



$M(x;y)\in D \iff \vec{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0.$

$\iff a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0 \iff ax+by-(a\alpha+b\beta)=0.$

Théorème : Toute droite du plan admet une équation cartésienne

du type $ax+by+c=0$ $(a,b)\neq 0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à la droite
et un vecteur directeur est $\vec{n}^{\perp}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Plan dans l'espace

Soit P un plan de l'espace passant par $A(\alpha;\beta;\gamma)$ et un
vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

$M(x;y;z)\in P \iff \vec{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\\z-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0.$

$\iff a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0 \iff ax+by+cz-(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0.$