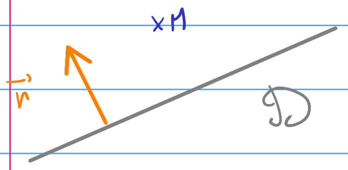
CM2 : Maths

Distance d'un point à une droite.

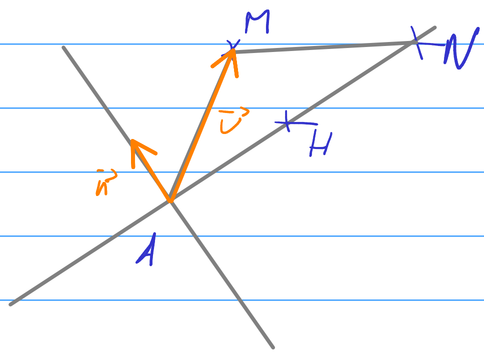


$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \min_{N \in \mathcal{D}} MN = MH$$

Où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Théorème Si $\mathcal{D}$ est la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ et dont une équation cartésienne est donnée par $\mathcal{D}: ax + by + c = 0$ et si $M(x_M ; y_M)$ est un point du plan, alors

$$\operatorname{dist}(M ; \mathcal{D}) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Preuve

Notons $\vec{u} = \vec{AM}$.

On a $P_{\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{HM}$. On sait que $P_{\vec{n}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$

D'où $\operatorname{dist}(M ; D) = \|P_{\vec{n}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$

De plus, $\vec{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$

Comme D a pour équa° cart $ax+by+c=0$

$\vec{n}_D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Donc $\vec{AM}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A)$

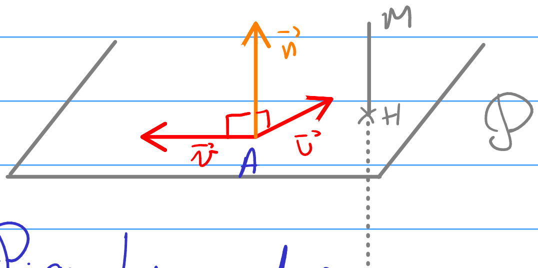
$= ax_M + by_M - (ax_A + by_A)$

$A \in D \Rightarrow ax_A + by_A = -c$

D'où $|\vec{AM}\cdot\vec{n}| = |ax_M + by_M + c|$

Donc $\dfrac{|\vec{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Distance d'un point à un plan dans l'espace



$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$

Théorème : Avec les notations précédentes,

$\text{dist}(M;\mathcal{P}) = \dfrac{|\vec{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Produit vectoriel (dans l'espace)

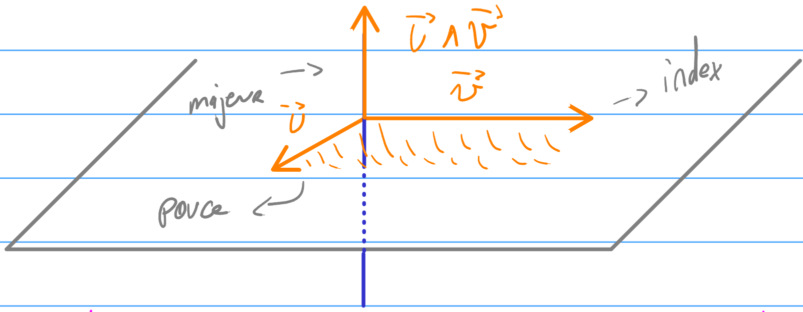
Déf. Soient $\vec{u}; \vec{v}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \neq \lambda \vec{v}$.

On définit $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ($\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$) comme l'unique vecteur tel que :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

(ii) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$ où $\theta = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

(iii) la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ est directe.



* Convention : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

* Remarques

* $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
* $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \text{aire}(S_{\vec{u},\vec{v}})$
* si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe, alors :

  - $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.

* Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

  → $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

  → $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

* Proposition : soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Preuve. $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \wedge (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$

$= a_1b_1 \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{i}}_{=\vec{0}} + a_1b_2 \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{j}}_{=\vec{k}} + a_1b_3 \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{k}}_{=-\vec{j}} \ldots$

Définition : soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. On va appeler déterminant ou ou produit mixte le réel définit par.

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Interprétation géométrique.

$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ = volume du parallélépipède engendré par

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires.
(admis)

Équation cartésienne d'une droite dans l'espace

Théorème : l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$(*) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{n'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

Réciproquement, toute droite de l'espace admet une représentation de type $(*)$ qu'on appelle un système d'équation cartésiennes de $\mathcal{D}$.

Preuve :

Comme $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires, $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq 0$.

De plus, les plans

$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$

$\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

ne sont pas parallèles ($\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$, $\vec{n'}$ normal à $\mathcal{P}'$)

Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$.

Soit $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$

Montrons que $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

Soit $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$

Alors $M \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} ax + by + cz + d = \underbrace{0}_{= ax_0 + by_0 + cz_0 + d} \\ a'x + b'y + c'z + d' = \underbrace{0}_{= a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d'} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{cases}$

$M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{AM} \cdot \vec{n'} = 0 \iff \vec{AM}$ et $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ colinéaires.

Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n'}$

Équation paramétriques :

* Droite dans le plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $A(\alpha;\beta)$ et le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$

Alors $M \in D \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow$ éq cartésienne

$\exists t \in \mathbb{R},\ \vec{AM} = t\vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ta + \alpha \\ y = tb + \beta \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

* Droite dans l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par $A(\alpha, \beta, \gamma)$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Alors $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}\ t \in \mathbb{R}.$

* Plan dans l'espace

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace passant par $A(\alpha, \beta, \gamma)$ passant par $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\vec{u'} \neq \lambda \vec{u}$

Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \vec{AM}, \vec{u},$