CM3 : Maths.

Soit $\mathcal{P}$ le plan donné par le système d'équations paramétriques suivants :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + 2t + 3t' \\ y = 3 + t + t' \\ z = -5 - t + 2t' \end{cases}, \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{P}$

Soit $A(1;3;-5)$, $A \in \mathcal{P}$ $(t = t' = 0)$

$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$

$\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

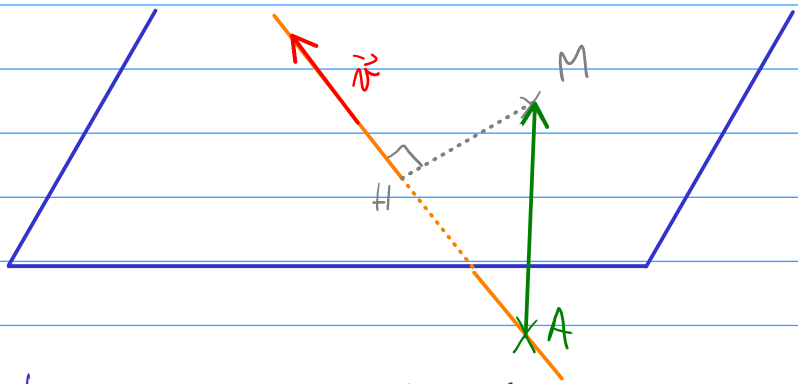
$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$\iff 3x - 3 - 7y + 21 - z - 5 = 0$

$\iff 3x - 7y - z + 13 = 0.$

Distance d'un point d'une droite dans l'espace.

Soit D une droite dans l'espace de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par A et soit M un point de l'espace.



La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ s'intersectent en un point H qu'on appelle le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$

$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.

$\mathcal{A}(S_{\vec{u},\vec{v}}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|$.

De plus, $\mathcal{A}(S_{,\vec{u},\vec{v}}) = \|\vec{v}\| \, MH$

Donc $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{v}\| MH \iff \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = MH$.

Théorème : Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit M est un point de l'espace

Alors, $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\|AM \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

Distance entre deux droites dans l'espace

Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace

1er cas : $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$

(Om précédent)

On choisit $A_1 \in \mathcal{D}_1$. Donc $dist(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = dist(A_1, \mathcal{D}_2)$

2e cas : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes. Alors $dist(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 0$

3e cas : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont ni parallèles, ni sécantes.

Le point clé est la notion de perpendiculaire commune.

Proposit° : soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles. Alors il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$. La droite Δ s'appelle la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Définit° : Si Δ et $\mathcal{D}_1$ sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$.

On dit que Δ et $\mathcal{D}_1$ sont perpendiculaires si :

* $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0$
* $\Delta \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset$

On choisit $A_1 \in \mathcal{D}_1$, $\vec{v}_1$ vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$
$A_2 \in \mathcal{D}_2$, $\vec{v}_2$ " " " $\mathcal{D}_2$.

Soit $\vec{u} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

On considère $\mathcal{P}_1$ passant par A_1 et dirigé par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}$.
" $\mathcal{P}_2$ " " A_2 " " " $\vec{u}_2$ et $\vec{u}$

On pose $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ étaient //, alors il existerait $\vec{n} \neq \vec{0}$

$\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$\vec{n} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{n} \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{n}$ colinéaire à $\vec{u}$

$\Rightarrow \vec{n}$ colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{u}$.
$\Rightarrow \vec{n} = \vec{0}$ (absurde).

Mq Δ est perpendiculaire à :

$\mathcal{D}_1$: $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ vecteur directeur de $\vec{u}$
$\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$

De +, Δ et $\mathcal{D}_1$ sont deux droites de $\mathcal{P}_1$ et comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

→ On est ramenés à calculer H_1H_2 où $\{H_1\} = \Delta \cap D_1$
$\{H_2\} = \Delta \cap D_2$.

$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \det(\overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

$= (\overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2}) \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$

$$= \overrightarrow{A_1H_1}\cdot\underbrace{\cancel{(\vec{u_1}\wedge\vec{u_2})}}_{=0} + \overrightarrow{H_1H_2}\cdot(\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}) + \overrightarrow{H_2A_2}\cdot\underbrace{\cancel{(\vec{u_1}\wedge\vec{u_2})}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2}) = \overrightarrow{H_1H_2}\cdot(\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}) = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|\,\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|\cos\theta$$

où $\theta = (\widehat{\overrightarrow{H_1H_2}, \vec{u_1}\wedge\vec{u_2}})$

Or, $\overrightarrow{H_1H_2}$ et $\overrightarrow{u_1\wedge u_2}$ sont colinéaires. Donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi\ [2\pi]$

D'où $|\cos\theta| = 1$.

$$\Rightarrow |\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2})| = H_1H_2 \times \|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|$$

$$\Rightarrow H_1H_2 = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2})|}{\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|}.$$

Théorème : soit $\mathcal{D}_1$ une droite passant par A_1 dirigée par $\vec{u_1}$ et $\mathcal{D}_2$ une droite passant par A_2 et dirigé par $\vec{u_2}$

Alors, $$\operatorname{dist}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2})|}{\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|}.$$

Chapitre 2 : Systèmes linéaires :

L'objectif de ce chapitre est de résoudre un système linéaire à p équations et n inconnues.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_n . \end{cases}$$

Les a_{ij} et les b_{ij} sont des réels donnés.

$1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$.

Une solut° de (S) est un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$
qui vérifie les p équations de (S)

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ est une sol de (S).

mais $(-1, 1, 0)$ pas une solut°.

· Résoudre (S), c'est trouver ttes les sol.

· Deux systèmes sont équivalents si ils possèdent le m̂ ensemble de solut°.