

Licence - Portail Mathématiques Informatique — Semestre 2

Mathématiques 2

Année universitaire 2024-2025

Livret d'exercices

TABLE DES MATIÈRES

1. Géométrie dans le plan et dans l'espace	1
1.1. Géométrie dans le plan	1
1.2. Géométrie dans l'espace.	2
Exercices supplémentaires	3
2. Systèmes linéaires	5
Exercices supplémentaires	6
3. Espaces vectoriels	6
3.1. Sous-espaces vectoriels	6
3.2. Combinaisons linéaires, familles libres, familles liées	7
3.3. Base d'un espace vectoriel	9
3.4. Sous-espaces supplémentaires	10
Exercices supplémentaires	11
4. Application linéaire et calcul matriciel	13
4.1. Applications linéaires	13
4.2. Noyau et image d'une application linéaire	13
4.3. Calcul matriciel	16
4.4. Matrice d'une application linéaire	18
4.5. Changement de bases	18
Exercices supplémentaires	21
5. Calcul de primitive et calcul intégral	22
5.1. Calcul de primitives et d'intégrales par des techniques usuelles	22
5.2. Calcul de primitives de fractions rationnelles	23
5.3. Un peu de théorie !	24

Exercices supplémentaires	27
6. Formules de Taylor et développements limités	28
6.1. Formules de Taylor	28
6.2. Calcul de développements limités	29
6.3. Applications des développements limités	31
Exercices supplémentaires	32
7. Equations différentielles	33

1. GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

1.1. Géométrie dans le plan. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, $\mathbb{R}^2$ est munit de sa bases orthonormée usuelle $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1.1. Soient $A(1, 0)$, $B(-1, -2)$ et $C(-1, 2)$.

- (1) Calculer les distances AB , AC et BC .
- (2) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. En déduire la nature exacte du triangle ABC .

Exercice 1.2. Trouver les valeurs possibles de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

$$(a) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad (b) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-x \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3. Donner une équation cartésienne de la droite D représentée par

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2-3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 1.4. Donner une équation cartésienne puis une représentation paramétrique de la droite D :

- (1) passant par $A(2, 3)$ et $B(-1, 4)$,
- (2) passant par $A(2, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = -3\vec{i} - \vec{j}$,
- (3) passant par $A(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x ,
- (4) passant par $A(1, 0)$ et perpendiculaire à la droite $\Delta : x - y + 5 = 0$.

Exercice 1.5. Calculer la distance du point A à la droite D dans les cas suivants :

- (1) $A(-2, 1)$ et $D : y = 2x - 1$,
- (2) $A(1, 2)$ et D est la droite passant par $B(-2, 1)$ et $C(1, 3)$,
- (3) $A(-2, 2)$ et D est la droite passant par $B(-2, 3)$ et dirigée par $\vec{u} = 3\vec{i}$.

Exercice 1.6. Soient $A(3, 2)$, $B(1, 2)$ et $C(4, 4)$ des points du plan.

- (1) Montrer que $\vec{OC}$ est la diagonale du parallélogramme de côtés $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.
- (2) Calculer l'aire du parallélogramme $OABC$.

Exercice 1.7. Soit $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ et $\vec{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

- (1) Vérifier que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée.
- (2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ dans cette base.

1.2. Géométrie dans l'espace. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa bases orthonormée usuelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1.8.

- (1) Montrer que les points $A(4, 5, 2)$, $B(1, 7, 3)$ et $C(2, 4, 5)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- (2) Montrer que les points $A(2, 1, 6)$, $B(4, 7, 9)$ et $C(8, 5, -6)$ sont les sommets d'un triangle rectangle.

Exercice 1.9. (1) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{w}$ dans les cas suivants :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Montrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{u} \perp (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
- (3) Trouver les valeurs possibles de x pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ soient coplanaires.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-x \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.10. On considère $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1, -3, 2)$ et $B(1, 2, -1)$.

- (1) Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
- (2) En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 1.11. (1) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, 2, -1)$

et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- (2) Donner une équation cartésienne de ce même plan $\mathcal{P}$.

Exercice 1.12. (1) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, 2, -1)$

et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (2) Donner une équation cartésienne de ce même plan $\mathcal{P}$.

Exercice 1.13. Soient $A(1, 2, 4)$, $B(2, 3, 6)$, $C(1, 0, 2)$ et $D(2, 2, 2)$ des points dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

- (1) Trouver la distance entre le point D et le plan passant par A , B et C .
- (2) Trouver la distance entre le point D et la droite (AB) .
- (3) Trouver la distance entre la droite (AB) et la droite (CD) .

Exercice 1.14. On considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par les représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

On admet que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et orthogonale à ces deux droites.

- (1) Vérifier que le point $A(2; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.
- (2) Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite $\mathcal{D}_1$ et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite $\mathcal{D}_2$.
Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?
- (3) (a) Calculer le produit vectoriel $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.
(b) Vérifier que le vecteur $\vec{v} = (1; -2; -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- (4) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$.
(a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}_2$ coupe le plan $\mathcal{P}$ à un unique point B dont on précisera les coordonnées.
- (5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v} = (1; -2; -3)$, et passant par le point B .
(a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
(b) Les droites $\mathcal{D}_1$ et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
(c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Exercice 1.15. On considère trois points $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 5, 2)$, $C(0, 2, 4)$ dans $\mathbb{R}^3$.

- (1) Montrer que les points A , B , C sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- (2) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ où $O(0, 0, 0)$ est l'origine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
- (3) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les trois points O , A et B .
- (4) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC) .
- (5) Trouver le volume du parallélépipède de côtés $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
- (6) Calculer la distance du point C au plan P .

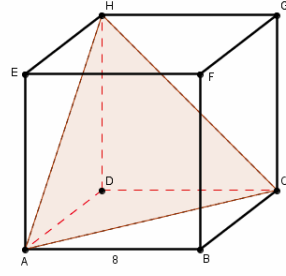
EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 1.16. On verra dans notre cours que tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ du plan ne sont pas indépendants, c'est-à-dire qu'il existe des réels non tous nuls λ , μ et δ tels que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \delta\vec{w} = \vec{0}$. Une telle relation sera appelée relation linéaire entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Déterminer dans chaque cas une relation linéaire :

$$(a) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.17.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

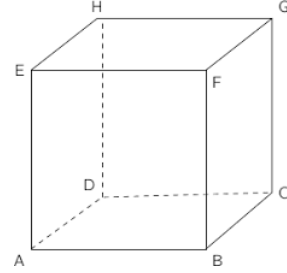


- (1) (a) Donner dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, les coordonnées des points D , A , C , H et E .
- (b) Donner, en le justifiant, un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ACH) .
- (c) Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{DA}$ sur $\vec{n}$.
- (d) En déduire la distance du point D au plan (ACH) .
- (e) Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $DACH$.

(2)

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$. Construire sur la figure la section du cube par le plan $\mathcal{P}$. La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

Indication : On pourra chercher les points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les arêtes du cube.



Exercice 1.18. On considère quatre points $A(1, 2, 4)$, $B(1, 1, 3)$, $C(1, 0, 2)$ et $D(2, 2, 2)$ de $\mathbb{R}^3$.

- (1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- (2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A , B et C .
- (3) Trouver un vecteur normal au plan P .
- (4) Déterminer la distance du point D au plan P .
- (5) Déterminer la distance du point D à la droite (AB) .

Exercice 1.19. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct, et trois points $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(-1, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

- (1) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}_1$ passant par O et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- (2) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC) .
- (3) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par O et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

- (4) Trouver le volume V du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

2. SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 2.1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases} & (2) \quad \begin{cases} x + 3y - 7z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 2 \end{cases} \\
 (3) \quad \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x - z + 3t = 9 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \end{cases} & (4) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \\ x + 4y + z = 18 \\ x + 6y + 5z = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

On précisera à chaque fois si le système a une unique solution, une infinité de solutions ou pas de solutions.

Exercice 2.2. Soit $(S_1) : \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - ay = a \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 2 \end{cases}$.

- (1) Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a , l'ensemble des solutions des systèmes (S_1) et (S_2) .
- (2) Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer les quatre droites représentées par les équations de ces systèmes.
- (3) Faire le lien entre les résultats obtenus dans les questions (1) et (2) ci-dessus.

Exercice 2.3. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a , l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = a \end{cases} & (2) \quad \begin{cases} x - y + az = a \\ x + ay - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \\
 (3) \quad \begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ 3x - ay + 2z = 1 \\ ax + y - z = 0 \\ x - 2y + z = a \end{cases} & (4) \quad \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases}
 \end{array}$$

On précisera à chaque fois si le système a une unique solution, une infinité de solutions ou pas de solutions.

Exercice 2.4. Soit $(S) : \begin{cases} x - y + az = a \\ x + ay - z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

- (1) Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a , l'ensemble des solutions du système (S) .
- (2) Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, illustrer les trois plans représentés par les équations de (S) .
- (3) Faire le lien entre les résultats obtenus dans les questions (1) et (2) ci-dessus.
- (4) Déterminer les cas où les solutions du système (S) représentent une droite dont on précisera une équation paramétrique.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 2.5. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a , l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$(1) \quad \begin{cases} x + y + (2a - 1)z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 3(a + 1) \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = -1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = -1 \end{cases}$$

Exercice 2.6. Déterminer, selon les valeurs des paramètres réels a et b , l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$(1) \quad \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b - 1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 3x + 3y - z = 4a \\ (2 - a)x + 2y - 2z = -2b \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

Exercice 2.7. ★ Notez qu'il y a des exercices **corrigés** sur le site
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00160.pdf>

3. ESPACES VECTORIELS

3.1. Sous-espaces vectoriels.

Exercice 3.1. (1) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- (a) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y\}$.
 - (b) $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$.
 - (c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
 - (d) $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$.
- (2) Dans les cas où l'ensemble proposé est un sous-espace vectoriel, indiquer sa nature géométrique.

Exercice 3.2. Pour tous les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E .

- (1) $E = \mathbb{R}^4$; $F = \{(a, b, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
- (2) $E = \mathbb{R}^4$; $F = \{(0, a, -a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.
- (3) $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace des fonction continues de $\mathbb{R}$ vers lui-même; $F = \{f \in E : f(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}\}$.
- (4) $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 1\}$.

Exercice 3.3. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3.4. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E . On rappelle que

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\} = \{u \in E : \exists f \in F \text{ et } \exists g \in G \text{ tel que } u = f + g\}.$$

- (1) Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) Montrer que si $G \subset F$, alors on a $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

3.2. Combinaisons linéaires, familles libres, familles liées.

Exercice 3.5. Soient $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer si la famille $\{u, v, w\}$ est libre ou liée. Dans le cas où la famille est liée, donner une combinaison linéaire non triviale entre les trois vecteurs.

Exercice 3.6. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- (1) Les vecteurs u et v sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$?
- (2) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont combinaisons linéaires de u et v .
- (3) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de u et v ?
- (4) Si $\mathbb{R}^3$ est rapporté de son repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, montrer que le sous-espace $\text{Vect}(u, v)$ s'identifie à un plan dont on donnera une équation cartésienne.

Exercice 3.7. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Peut-on déterminer a et b pour que $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v)$? Et pour que $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v)$?

Exercice 3.8. (1) On considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (-2, 1, 2)$, $w = (1, -2, 4)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer si la famille $\{u, v, w\}$ est une famille libre ou liée.
 (2) Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 3, 4, 2)$, $u_3 = (-1, 2, 1, 0)$ et $u_4 = (-2, 1, 0, 2)$.

Exercice 3.9. (1) On considère $P_1(X) = 1 - X + X^2$, $P_2(X) = 2 + 2X + 3X^2$ et $P_3(X) = -1 + 2X + 4X^2$. Déterminer si la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre ou liée dans $\mathbb{R}_2[X]$.
 (2) Même question avec $P_1(X) = 1 + X + 2X^2$, $P_2(X) = X + 3X^2 + X^3$, $P_3(X) = X + X^2 + X^3$ et $P_4(X) = 1 - X^2 - 2X^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
 (3) Même question dans $\mathbb{R}_2[X]$ avec $P_1(X) = 1 + X + X^2$, $P_2(X) = -2 + 3X + 5X^2$ et $P_3(X) = 8 - 7X - 13X^2$.

Exercice 3.10. On considère l'espace des suites réelles qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et trois suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$, $v = (v_n)_{n \geq 0}$ et $w = (w_n)_{n \geq 0}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \cos(n) + \sin(n), \quad v_n = \ln(n+1), \quad w_n = 2n.$$

Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3.11. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou non dans E . Dans le cas où elles sont liées, donner une combinaison linéaire non triviale.

- (1) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (2) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = \cos^2(x)$, $f_2(x) = \sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = e^{r_1 x}$, $f_2(x) = e^{r_2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$.
- (4) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = e^{rx}$, $f_2(x) = xe^{rx}$, $x \in \mathbb{R}$, avec $r \in \mathbb{R}$.
- (5) $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ avec $f_k(x) = e^{kx}$, $0 \leq k \leq n$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Indication : pour la dernière famille, on pourra penser à utiliser que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$.

3.3. Base d'un espace vectoriel.

Exercice 3.12. (1) Montrer que si $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 2)$ et $u_3 = (2, 0, 1)$, alors la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, 0, t)$, $(1, 1, t)$ et $(t, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.13. (1) Soit $P_1(X) = 1 + X + 3X^2$, $P_2(X) = -2 + X + X^2$ et $P_3(X) = 3 + 2X + 5X^2$. Est-ce que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

(2) Même question avec $\{P_1, P_2\}$?

(3) Même question avec $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, où $P_4(X) = 2 + 7X + X^2$.

Dans le cas où la famille n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$, indiquer si c'est la propriété d'être libre ou génératrice qui fait défaut.

Exercice 3.14. Déterminer le rang des familles suivantes. On donnera, le cas échéant, les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs proposés et une base du sous-espace engendré par ces vecteurs.

(1) $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 1)$.

(2) $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, où $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (-1, 1, -1)$ et $w_4 = (1, -2, 3)$.

Exercice 3.15. Dans $\mathbb{R}^4$, si $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 2, 0, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1, 0)$, montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre et déterminer un vecteur avec lequel la famille se complète en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.16. (1) Montrer qu'une famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ tels que $\deg P_k = k$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

(2) En déduire que toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est une famille libre.

(3) Application. Si $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X - 1)$ et $P_3(X) = X(X - 1)(X - 2)$, montrer que la famille $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et décomposer le vecteur X^3 dans cette base.

Exercice 3.17. Soit $u_1 = (1, -1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, -1, 3)$, $u_3 = (4, 1, 2, 1)$, $u_4 = (2, -1, -1, 1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Exercice 3.18. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$. Déterminer une base de F , de G de $F \cap G$ et de $F + G$.

Exercice 3.19. (1) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : x = y \text{ et } z + t + u = 0\}.$$

Déterminer une base et la dimension de F .

(2) Même question avec le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Exercice 3.20. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles $\mathbb{R}^N$ définie par

$$\mathcal{S}_1 = \{u = (u_n)_{n \geq 0} : u_{n+3} = u_n, n \geq 0\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{S}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$.

(2) On considère les trois suites u, v et w de $\mathcal{S}_1$ définies par

$$u = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad v = (0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots), \quad w = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots),$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de la congruence de n modulo 3.

(3) Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre dans $\mathbb{R}^N$.

(4) Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_1$ et en déduire la dimension de $\mathcal{S}_1$.

3.4. Sous-espaces supplémentaires.

Exercice 3.21. (1) Déterminer une base, la dimension et indiquer la nature géométrique de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$

(b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, z = 3x\}.$

(c) $H = \{(\lambda, \mu - 2\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$

(2) Reprendre les mêmes questions pour $F \cap G, F \cap H$ et $G \cap H$.

(3) Parmi les couples de sous-espaces vectoriels $(F, G), (F, H)$ et (G, H) , déterminer ceux qui sont supplémentaires.

Exercice 3.22. Soient $u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 0, 1), u_3 = (2, 1, 0, 0), u_4 = (3, 1, 1, 0), u_5 = (-1, -1, 1, 0), F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3, u_4, u_5)$.

(1) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

(2) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3.23. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (1, 3, 5)$.

(1) Déterminer le rang de la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(2) Donner une base de F .

- (3) On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$. Donner une base de G .
- (4) Déterminer la dimension de $F \cap G$.
- (5) Déterminer la dimension de $F + G$.
- (6) Que peut-on en déduire pour $F + G$?
- (7) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.24. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E des applications f qui vérifient $f'(0) = f(0) = 0$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 3.25. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré d et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : A \text{ divise } P\}$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- (2) Trouver un supplémentaire de F .

Exercice 3.26. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires et G le sous-espace des fonctions impaires.

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 3.27. Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

- (1) Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
- (2) Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
- (3) A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3.28. Pour tous les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E .

- (1) $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.
- (2) $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\}$.
- (3) $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \geq 0\}$.
- (4) $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 = 0\}$.
- (5) $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.
- (6) $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y - z = 1\}$.
- (7) $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 2x - 3y - z = 0\}$.

(8) $E = \mathbb{R}^4$; $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xy = zt\}$.

Dans les cas où F est un sous-espace vectoriel de E , indiquer sa nature géométrique.

Exercice 3.29. (1) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre, c'est-à-dire tels que pour tout réel λ , on ait $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u et v est égal à $\mathbb{R}^2$.

(2) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.30. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (2, 1, 4, 3)$.

(1) Montrer qu'on peut trouver une infinité de réels non nuls a et b tels que $v = (a, a, b, b) \in \text{Vect}(u_1, u_2)$.

(2) Montrer qu'il en est de même pour $w = (a, b, a, b)$.

(3) Que peut-on dire de $s = (a, b, b, a)$? Justifier la réponse.

Exercice 3.31. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que les familles (v_1, v_2) et (w_1, w_2, w_3) sont libres.

(2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$. Déterminer une base de F .

(3) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Déterminer une base de G .

Exercice 3.32. (1) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

(2) Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F_u = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}, \quad G_u = \{(a\lambda, b\lambda, c\lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Montrer que F_u et G_u sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

(b) Indiquer la nature géométrique de F_u et G_u .

Exercice 3.33. ★ Notez qu'il y a des exercices corrigés sur les sites

<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00017.pdf>

<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00019.pdf>

4. APPLICATION LINÉAIRE ET CALCUL MATRICIEL

4.1. Applications linéaires.

Exercice 4.1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

- | | |
|--|---|
| (1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array} ;$ | (2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, a) \end{array} ;$ |
| (3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (ax, ay) \end{array} ;$ | (4) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 1, y + a) \end{array} ;$ |
| (5) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + z, y + z) \end{array} ;$ | (6) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x, 0, x - y) \end{array} .$ |

4.2. Noyau et image d'une application linéaire.

Exercice 4.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (1) Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $f(E_1) = \{y \in F : \exists x \in E_1 \text{ tel que } y = f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
- (2) Soit F_1 un sous-espace vectoriel de F . Montrer que l'image réciproque de F_1 par f , i.e. $f^{-1}(F_1) = \{x \in E : f(x) \in F_1\}$, est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 4.3. Les applications suivantes de E dans F sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.

- (1) $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, x)$.
- (2) $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, x + y + 1)$.
- (3) $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x + 2y - z$.
- (4) $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, xy)$.

Exercice 4.4. (1) Donner une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y, z) = 3x + 2y - z$;
 - (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_2(x, y) = (2x + y, 2x - y, x + y)$;
 - (c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_3(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - z, -x + 2y + 2z)$.
- (2) Soit Δ la droite (vectorielle) de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(-1, 1, -1)$. Donner, quand cela a un sens, une base de l'image et de l'image réciproque de Δ par les applications linéaires f_1, f_2 et f_3 .

Exercice 4.5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)$.

- (1) Montrer que f est linéaire.
- (2) Déterminer une base et la dimension du noyau de f .

- (3) En déduire le rang de f .

Exercice 4.6. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$.

- (1) Donner une base de l'image et une base du noyau de f . Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
- (2) Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de $\mathcal{P}$? Reconnaissez-vous la nature géométrique de $\mathcal{P}$? Donner une base de $f(\mathcal{P})$ et une base de $f^{-1}(\mathcal{P})$.

Exercice 4.7. (1) Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(1)$.

- (i) Montrer que f est linéaire.
- (ii) Déterminer une base et la dimension de l'image et du noyau de f .
- (2) Soit $g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(P) = (P(1), P'(1))$.
 - (i) Montrer que g est linéaire.
 - (ii) Déterminer une base et la dimension de l'image et du noyau de g .

Exercice 4.8. Soit $v = (1, 2, 1)$ et soit p_v la projection orthogonale sur v qui est définie par : $u \rightarrow p_v(u) = \frac{u.v}{\|v\|^2} v$ ($u \in \mathbb{R}^3$), où $u.v$ est le produit scalaire entre u et v .

- (1) Vérifier que p_v est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $p_v \circ p_v = p_v$.
- (2) Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $p_v(u)$.
- (3) Déterminer $\text{Ker}(p_v)$ et $\text{Im}(p_v)$, en précisant leur nature géométrique.
- (4) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p_v) \oplus \text{Im}(p_v)$? Justifier la réponse.

Exercice 4.9. Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E , i.e. $p \in \mathcal{L}(E, E)$. On suppose que $p \circ p = p$ (un tel endomorphisme s'appelle un projecteur). Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Exercice 4.10. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -e_1$ et $f(e_3) = e_3$.

- (1) Déterminer l'image par f d'un élément $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
- (3) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 4.11. Donner dans chaque cas la dimension du noyau de f , puis le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

- (1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y, z, x)$.
- (2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$.

(3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + ay - z, 2x + 2y, x - 2z)$, où a est un paramètre réel.

Pour le (1) calculer f^{-1} , et pour (3) calculer f_2^{-1} .

Exercice 4.12. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même, définie par $f(P) = P - P'$ est linéaire. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4.13. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit l'application u de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

- (1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
- (2) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
- (3) Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.
- (4) Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 4.14. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_d)$ une famille de $d + 1$ nombres réels deux à deux distincts. On définit $\varphi : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ par $\varphi_{\mathbf{t}}(P) = (P(t_0), P(t_1), \dots, P(t_d))$.

- (1) Démontrer que $\varphi_{\mathbf{t}}$ est linéaire.
- (2) Pour $0 \leq i \leq d$, on considère le polynôme P_i , défini par

$$P_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq d \\ k \neq i}} \frac{X - t_k}{t_i - t_k}.$$

Vérifier que $P_i \in \mathbb{R}_d[X]$.

- (3) Déterminer $\varphi_{\mathbf{t}}(P_i)$.
- (4) Que peut-on en déduire sur l'application $\varphi_{\mathbf{t}}$?
- (5) Que peut-on dire de la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_d\}$?
- (6) Montrer que pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ il existe un unique polynôme P tel que

$$P(t_i) = \lambda_i, \quad \forall 0 \leq i \leq d.$$

Expliciter P en fonction des λ_i et des P_i .

Les polynômes P_i s'appellent les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Exercice 4.15. Soit $g \in \mathcal{L}(E, G)$ et $f \in \mathcal{L}(G, F)$. Montrer que

$$f \circ g = 0 \iff \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f).$$

Exercice 4.16. Soit $g \in \mathcal{L}(E, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que G est un espace vectoriel de dimension finie. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de "factorisation" suivant

$$(\exists h \in \mathcal{L}(F, G) \text{ tel que } g = h \circ f) \iff \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

- (1) On suppose d'abord qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$. Vérifier que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
 (2) Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$. Considérons F_0 un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans F . Autrement dit, $F = \text{Im}(f) \oplus F_0$.

(i) Vérifier que, pour tous $x, x_1 \in E$ et tous $y, y_1 \in F_0$, on a

$$f(x) + y = f(x_1) + y_1 \implies g(x) = g(x_1).$$

(a) En déduire que si on pose, pour $z \in F$,

$$h(z) = g(x) \quad \text{où } z = f(x) + y, \quad x \in E, y \in F_0,$$

alors h est bien définie et est une application linéaire de F dans G .

(b) Vérifier alors que $g = h \circ f$.

Exercice 4.17. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $G \subset \text{Ker}(f)$ et notons H un supplémentaire de G dans E , i.e. $E = G \oplus H$. On rappelle alors que la projection p de E sur H parallèlement à G , définie par $p(g + h) = h$, où $(g, h) \in G \times H$, est linéaire.

- (1) Montrer qu'il existe une application linéaire $\tilde{f} : H \longrightarrow F$ telle que $f = \tilde{f} \circ p$.
 (2) On suppose dans cette question que f est surjective et que $G = \text{Ker}(f)$. Montrer alors que l'application $\tilde{f}$ de la question précédente est un isomorphisme de H sur F .

4.3. Calcul matriciel.

Exercice 4.18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $2A + 3B$.

Exercice 4.19. Calculer lorsqu'ils sont définies les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

- (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.20. Soit $A, B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer A^2 , B^2 , AB , BA et $(A + B)^2$.
 (2) Comparer les matrices $(A + B)^2$ avec $A^2 + 2AB + B^2$, puis avec $A^2 + AB + BA + B^2$.

(3) Que remarquez-vous ?

Exercice 4.21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Trouver toutes les matrices $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telle que $AB = BA$.
- (2) En déduire que $\{B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

Exercice 4.22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , A^3 . En déduire la valeur de A^n , pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4.23. Indiquer si F est un sous espace vectoriel de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dans les deux cas suivants :

$$(a) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad (b) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4.24. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer AB et AC . Que constate-t-on ?
- (2) La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier.

Exercice 4.25. Dire si les matrices suivantes sont inversibles et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.26. (1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, et en déduire que A est inversible. On donnera A^{-1} .

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

4.4. Matrice d'une application linéaire.

Exercice 4.27. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par : $f(x, y, z) = (2x - 2y - 3z, x - y - 2z, -x + y + 2z)$ et $g(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y - z)$.

- (1) Écrire les matrices des applications f et g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ en utilisant le calcul matriciel.

Exercice 4.28. Soit $\phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto XP'$.

- (1) Vérifier que ϕ est linéaire.
- (2) Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4.29. Soit f_a l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, dont la matrice dans la base

canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

- (1) Discuter l'injectivité de f_a suivant a et lorsque f_a n'est pas injective donner une base de $\text{Ker}(f_a)$.
- (2) Donner dans tous les cas le rang de f_a et une base de $\text{Im}(f_a)$.

Exercice 4.30. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ une base de E , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f l'application linéaire de E dans lui-même définie par : $f(a_1) = a_1 + a_2$, $f(a_2) = a_1 - a_2$ et $f(a_3) = a_1 + \lambda a_3$.

- (1) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (2) Déterminer le noyau de f et en donner une base, suivant les valeurs du paramètre λ . Déterminer dans tous les cas le rang de f .
- (3) Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme de E (càd un isomorphisme de E dans lui-même) ? Dans ce cas, calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4.31. Soit a et b deux réels et A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\text{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rg}(A) = 2$?

4.5. Changement de bases.

Exercice 4.32. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}' = (u, v)$, où $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$.

- (1) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- (2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Calculer $f(u)$, $f(v)$. Déterminer la matrice A_1 de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, la matrice A_2 de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$ et la matrice A_3 de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

- (3) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Retrouver A_1 et A_2 en utilisant la formule de changement de bases.

Exercice 4.33. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (1) Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ 2x + y + 3z + t = 0 \\ 2x + 4y + 2t = 0 \end{cases}$.
- (2) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
- (3) Déterminer $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- (4) Quel est le rang de f ?

Exercice 4.34. Soit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ et $\mathcal{B}' = (u', v', w')$ les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w' = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Justifier que

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}_0} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0}.$$

- (3) Calculer la matrice de passage P' de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- (4) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4.35. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
- (2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- (3) Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.36. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, définie par : $f(x, y, z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z)$.

- (1) Écrire la matrice de f dans la base canonique.
- (2) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de f .
- (3) Soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v\}$ le sous-espace des vecteurs invariants par f . Justifier que F est un espace vectoriel et déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de F .
- (4) Montrer que les deux espaces précédents sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- (5) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Exercice 4.37. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3$, $f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3$ et $f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$.

- (1) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (2) Déterminer $f(u)$ si $u = (1, 2, 3)$ ou $u = (1, 0, 1)$.
- (3) Soit $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -u\}$.
 - (a) Démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
 - (b) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
 - (c) On considère $\{u_1, v_1\}$ une base de F_1 et $\{w_1\}$ une base de F_2 . On note $\mathcal{B}' = (u_1, v_1, w_1)$.
 - (i) Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (ii) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4.38. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie pour $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(u) = \begin{pmatrix} -x + 3y + 3z \\ 3x - y - 3z \\ -3x + 3y + 5z \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que f est une application linéaire.
- (2) Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (3) On considère la famille $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (4) Donner la matrice $P = \text{Mat}(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
- (5) Calculer P^{-1} .
- (6) On note $B = \text{Mat}(f, \mathcal{B}')$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Donner la relation exprimant B en fonction de A , P et P^{-1} .

- (7) Calculer B .
- (8) En déduire le calcul de A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.39. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie sur la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ par

$$f(1) = 2 - 2X + X^2, \quad f(X) = -1 + X + X^2, \quad \text{et} \quad f(X^2) = -2X + 3X^2.$$

- (1) Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (2) On considère $P_1(X) = 1 + X - X^2$, $P_2(X) = 1 - X^2$ et $P_3(X) = 1 - X$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (3) Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $P = \text{Mat}(Id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.
- (4) Calculer P^{-1} .
- (5) Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 4.40. (1) Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ non nulle est de la forme $f(x, y, z) = ax + by + cz$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. (On pourra partir de l'égalité $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$.)

- (2) Quelle est la forme d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?
- (3) De même quelle est la forme d'une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4.41. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1) = e_1 + e_2$. On suppose que son noyau est une droite vectorielle, càd $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

- (1) Démontrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont colinéaires et, plus précisément, qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_2) = a(e_1 + e_2)$.
- (2) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de a .
- (3) Déterminer une base du noyau $\text{Ker}(f)$ et de l'image $\text{Im}(f)$.

Exercice 4.42. Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , on définit l'application $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

- (1) Montrer que f est linéaire.
- (2) Déterminer le noyau et l'image de f .
- (3) Que donne le théorème du rang ?

Exercice 4.43. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow E$ une application linéaire.

- (1) Montrer $\dim E = \dim(\text{Im} f + \text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f \cap \text{Ker} f)$.
- (2) Montrer $\text{Ker} f \oplus \text{Im} f = E$ si et seulement si $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{0\}$.

- (3) Montrer $\text{Ker} f \oplus \text{Im} f = E$ si et seulement si $\text{Im} f = \text{Im}(f \circ f)$.
- (4) En utilisant (2), dire si $\text{Im} f$ et $\text{Ker} f$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$ dans les deux cas suivants :
- (a) $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z, x - 2y + z)$.
- (b) $f(x, y, z) = (2(x + y + z), 0, x + y + z)$.

Exercice 4.44. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et soit $f : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = AM - MA$ pour toute matrice $M \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Posons

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que f est une application linéaire.
- (2) Ecrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (3) On suppose que $a = d$, $c = -b$ et $b \neq 0$.
- (a) Déterminer le noyau et l'image de f .
- (b) Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. En déduire que $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- (c) Montrer que $f \circ f \circ f = -f$.

Exercice 4.45. ★ Notez qu'il y a des exercices corrigés sur les sites
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00018.pdf>
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00162.pdf>

5. CALCUL DE PRIMITIVE ET CALCUL INTÉGRAL

5.1. Calcul de primitives et d'intégrales par des techniques usuelles.

Exercice 5.1. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{(x+1)^3} dx, \quad \int \frac{x}{(x+1)^3} dx, \quad \int x^2(x^3+1)^4 dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx,$$

$$\int \sqrt{1-x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}, \quad \int \frac{6x+3}{x^2+x+1} dx, \quad \int (3x^2+2x)e^{2x^3+2x^2+1} dx$$

Exercice 5.2. A l'aide d'intégrations par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} \int x e^x dx, & \quad \int x^2 e^{-x} dx, & \quad \int (x^2 - x) e^{2x} dx, \\ \int \ln x dx, & \quad \int \ln(1 + x^2) dx, & \quad \int x \ln^2 x dx, \\ \int x \cos^2 x dx, & \quad \int (x^2 - 2x) \cos(2x) dx, & \quad \int (x^2 + x) \sin x dx, \\ \int x \arctan x dx, & \quad \int \sqrt{1 - x^2} dx, & \quad \int \arcsin x dx. \end{aligned}$$

Exercice 5.3. Calculer, à l'aide de changements de variable, les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, & \quad \int \sqrt{1 - x^2} x dx, & \quad \int \sqrt{1 - x^2} dx, & \quad \int \frac{\ln x}{x} dx, \\ \int \frac{dx}{x \ln x}, & \quad \int \tan x dx, & \quad \int \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx, & \quad \int \sin x \cos^2 x dx. \\ \int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx & \quad \int \frac{6x}{\sqrt{1 - 9x^4}} dx \end{aligned}$$

Exercice 5.4. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x dx, & \quad \int_1^2 \ln^2 x dx, & \quad \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, & \quad \int_0^1 x^2 e^x dx, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx, & \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, & \quad \int_0^\pi x \cos x dx, & \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Exercice 5.5. On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \quad J = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

- (1) A l'aide du changement de variables $u = \pi - x$, exprimer I en fonction de J .
- (2) Calculer J et en déduire la valeur de I .

5.2. Calcul de primitives de fractions rationnelles.

Exercice 5.6. Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx, & \quad \int \frac{x}{x^2 - 2x - 3} dx, & \quad \int \frac{x + 1}{x(x + 2)} dx, & \quad \int \frac{x + 1}{x^2 - x - 6} dx, \\ \int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx, & \quad \int \frac{x + 1}{x^2 + 4} dx, & \quad \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx, & \quad \int \frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx. \end{aligned}$$

Exercice 5.7. (1) Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$. Calculer les primitives de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

(2) En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 5.8. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{3x^2 + x + 2}{x(4x^2 + 2)} dx,$$

puis

$$J = \int_0^{\ln(2)} \frac{3e^u + 2e^{-u} + 1}{4e^u + 2e^{-u}} du.$$

Exercice 5.9. En appliquant les règles de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{\sqrt{2}\cos(x) + 2\sin^2(x)} dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin(x)}, \quad L = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x) + \sin(2x)}.$$

Exercice 5.10. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

(2) $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-6}}$, sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\operatorname{ch}(u)$.

(3) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$, sur l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 5.11. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + x + 1} dx, \quad J = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx, \quad K = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx, \quad L = \int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5} dx.$$

indication : pour le calcul de L , on introduira l'unique α tel que $\operatorname{sh}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

5.3. Un peu de théorie !

Exercice 5.12. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tous $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$, on a $\int_\alpha^\beta f(t) dt = 0$. Montrer que $f \equiv 0$.

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$.

Exercice 5.13.

(1) Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \geq 0$ et que $\int_0^1 g(x) dx = 0$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = 0$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) > 0$, puis utiliser la définition de la continuité de g en x_0 .

- (2) Déterminer toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues vérifiant

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Exercice 5.14. Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

- (1) Donner le domaine de définition de f .
- (2) Etudier la parité de f .
- (3) Etudier les variations de f .
- (4) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$.
- (5) En déduire les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- (6) Dresser le tableau de variation de f et esquisser son graphe.

Exercice 5.15. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4 + t^4}} dt.$$

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f sans faire le calcul de l'intégrale.

- (1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que f est impaire.
- (3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra remarquer que $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ où Φ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + t^4}}$.

- (4) En utilisant une expression conjuguée, montrer que $f'(x)$ est du même signe que $1 - x^4$.
- (5) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- (6) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{4 + 16x^4}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4 + x^4}}.$$

- (7) En déduire la limite de f en $+\infty$.
- (8) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
- (9) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en $(0, 0)$ et déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente. Préciser la nature du point $(0, 0)$ pour la courbe de f .
- (10) Tracer l'allure du graphe de f .

Exercice 5.16. On considère $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ sur $[0, 1]$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (1) Montrer que pour toute fonction en escalier ψ sur $[0, 1]$ telle que, $\forall x \in [0, 1]$, on a $\psi(x) \geq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors

$$\int_0^1 \psi(x) dx \geq 1.$$

Indication : on introduira une subdivision adaptée à ψ et on utilisera la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

- (2) Montrer que pour toute fonction en escalier φ sur $[0, 1]$ telle que, $\forall x \in [0, 1]$, on a $\varphi(x) \leq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \leq 0.$$

- (3) En déduire que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemman intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 5.17 (Lemme de Riemman-Lebesgue). Soit $-\infty < a < b < +\infty$.

- (1) On considère φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_a^b \varphi(x) \sin(nx) dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- (2) Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\epsilon > 0$. On pose $v_n = \int_a^b \psi(x) \sin(nx) dx$, $n \geq 0$.

- (a) Justifier qu'il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon.$$

- (b) En utilisant la question (1), en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exercice 5.18. Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

- (1) Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

- (2) Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Exercice 5.19. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Exercice 5.20 (Sommes de Riemman). Calculer les limites des suites définies par :

- (1) $u_n = \frac{1}{n} (\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \cdots + \sin(n\pi/n))$;
 (2) $v_n = n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$.

Exercice 5.21 (Une jolie inégalité : inégalité de Jensen).

(1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t)) dt.$$

Indication : on pourra considérer les sommes de Riemann $u_n = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.

(2) En déduire que

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \exp(f(t)) dt.$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 5.22. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx, \quad \int \sin^2 x \cos^2 x dx, \quad \int \cos(3x) \sin(5x) dx,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}, \quad \int \frac{x+3}{(x+2)^2} dx, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5},$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} dx, \quad \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} dx,$$

Exercice 5.23. Calculer, à l'aide de changements de variable, les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx, \quad \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx, \quad \int \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$$

Exercice 5.24. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes d'équations $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 5.25. Calculer $I(a) = \int_a^{1/a} \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} dx$ pour $a > 0$. On pourra poser le changement de variable $t = 1/x$.

Exercice 5.26. Pour $n = 1, 2$ et 3 , on se propose de calculer les primitives $A_n = \int \frac{2ax+b}{(x^2+1)^n} dx$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Pour ceci, on pose $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

(1) Vérifier les relations suivantes :

(a) $A_1 = a \ln(x^2+1) + b I_1$;

(b) $A_2 = -\frac{a}{x^2+1} + b I_2$;

(c) $A_3 = -\frac{a}{2(x^2+1)^2} + b I_3$.

- (2) Établir la relation de récurrence : $2nI_{n+1} = \frac{1}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n$.
- (3) Donner I_1 et en déduire I_2 puis I_3
- (4) En déduire A_1 , A_2 et A_3 .

Exercice 5.27. On se propose de calculer les primitives $I_n = \int \frac{dx}{(x^3+1)^n}$ pour $n = 1, 2$ et 3 .

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $\left(\frac{x}{(x^3+1)^n}\right)' = \frac{3n}{(x^3+1)^{n+1}} + \frac{1-3n}{(x^3+1)^n}$.
- (2) En déduire que $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n + \frac{x}{3n(x^3+1)^n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
- (3) Calculer I_1 .
- (4) En déduire I_2 et I_3 .

Exercice 5.28. On rappelle que $\frac{\sin x}{x}$ peut se prolonger en une fonction continue en 0 , notée g .

Sur $\mathbb{R}$, soit $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ et considérons f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt$.

- (1) G est-elle une fonction paire ou impaire ? Justifier votre réponse.
- (2) Vérifier que $f(x) = G(2x) - G(x)$.
- (3) Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (4) Vérifier que $f'(x) = \frac{\sin x}{x}(2\cos x - 1)$ pour $x \neq 0$ et donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 5.29. ★ Notez qu'il y a des exercices corrigés sur le site
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00015.pdf>

6. FORMULES DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

6.1. Formules de Taylor.

Exercice 6.1. (1) En appliquant la formule de Taylor – Lagrange à la fonction e^x , montrer que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

- (2) Pour $a > 0$ fixé, on considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{a^n}{n!}$. En considérant u_{n+1}/u_n , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

- (4) Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle en 0 à l'ordre $n \geq 1$ et en déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

- (5) Donner une valeur approchée de e à 10^{-2} près.
 (6) En utilisant (4), montrer que e est irrationnel.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 6.2. (1) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n + 1$ en 0 à la fonction $\ln(1 + x)$.
 (2) En déduire une valeur approchée de $\ln(1, 1)$ à 10^{-5} près.

Exercice 6.3. (1) Montrer que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 (2) Proposer un encadrement similaire pour $\sin x$ et donner une valeur approchée de $\sin \frac{1}{10}$ à 10^{-3} .

Exercice 6.4. La fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive explicite, càd, sa primitive ne peut pas être exprimée, au moyen des opérations algébriques, en termes de fonctions usuelles. Par conséquent, à toute paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\int_a^b e^{-x^2} dx$ ne peut qu'être calculée *numériquement*.

- (1) Montrer que pour tout réel x , il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} e^{-\theta x^2}$.
 (2) En déduire une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ et donner un majorant de l'erreur commise.

Exercice 6.5. Soit I un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Indication : appliquer la formule de Taylor-Young à la fonction f .

6.2. Calcul de développements limités.

Exercice 6.6. Considérons les fonctions $f(x) = \frac{2+x}{(1+x)^2} e^{-x}$, $g(x) = \frac{2-x-2x^2}{1+2x}$ et $h(x) = \frac{2+x-3x^2}{1+3x+2x^2}$.

- (1) Former les développements limités en 0 à l'ordre 3 de f , g et h .
 (2) Des fonctions g et h , laquelle réalise la meilleure approximation de f au voisinage de 0 ?

Exercice 6.7. Former le développement limité en 0 à l'ordre indiqué entre parenthèses de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 &1. (\cos x) e^x \quad (3); & 2. e^x \sqrt{1-x} \quad (3); & 3. \ln(\cos x) \quad (6); \\
 &4. \sqrt{\cos x} \quad (4); & 5. \tan x \quad (5); & 6. \arctan(1-x) \quad (3); \\
 &7. e^{\sin x} \quad (4); & 8. \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} \quad (3); & 9. \frac{\ln(1-x)}{1+x} \quad (4).
 \end{aligned}$$

Exercice 6.8. Déterminer les réels a, b, c, d de sorte qu'au voisinage de 0 la fonction f soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &f(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x - 1}. \\
 (2) \quad &f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}. \\
 (3) \quad &f(x) = e^x - a \cos x - b \sin x - c \cos(2x) - d \sin(2x). \\
 (4) \quad &f(x) = \ln(1+ax+bx^2) - \frac{x}{1+cx}.
 \end{aligned}$$

Exercice 6.9. (1) Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.

(2) Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

(3) Développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 6.10. (1) Former le développement limité en 1 à l'ordre 3 de les fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad 2. g(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

(2) En déduire une valeur approchée de $f(x)$ et $g(x)$ pour $x = 0,95$ et $x = 1,001$.

Exercice 6.11. Former le développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ à l'ordre 3 de la fonction f dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}; \quad 2. f(x) = \arctan x; \quad 3. f(x) = \arctan \frac{x}{1-x}.$$

Exercice 6.12. Former le développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ à l'ordre 3 de la fonction f dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &f(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2+1}. \\
 (2) \quad &f(x) = \sqrt{x^2+3x+2} + x.
 \end{aligned}$$

6.3. Applications des développements limités.

Exercice 6.13. Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln(1 - x)}{\cos x - 1}.$$

Exercice 6.14. Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\arctan(x) - x}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2) - x + 2}{(x - 2)^3},$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.15. (1) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $(0, f(0))$ et préciser la position du graphe par rapport à cette tangente dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt{4+x}; \quad 2. f(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{2}e^x + 1.$$

(2) Mêmes questions mais au point $x = 1$ pour les fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \ln x; \quad 2. f(x) = x \ln x; \quad 3. f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Exercice 6.16. Soit $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .
- (2) En déduire l'équation de la tangente en 0 à la courbe et montrer que $(0, 1/2)$ est un point d'inflexion.

Exercice 6.17. Etudier les branches infinies du graphe de chacune des fonctions f suivantes :

$$1. f(x) = \sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{4+x^2}; \quad 2. f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Exercice 6.18. On considère la fonction f définie sur $I =]-\pi, \pi[\setminus \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}.$$

- (1) Vérifier que pour $x \in I$, on a $f(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x \sin(x)}$. En déduire qu'on peut prolonger f en $-\pi/2$ et $\pi/2$ de manière à obtenir une fonction continue et dérivable sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$, qu'on notera toujours f .
- (2) On pose $f(0) = 0$. A l'aide de l'expression précédente, calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 4. En déduire que f est continue en 0, dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- (3) Calculer la fonction $f'(x)$, $x \in] -\pi, \pi[$ et démontrer que f est de classe C^1 sur $] -\pi, \pi[$.

Exercice 6.19. Etudier la fonction $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ et tracer le graphe de cette fonction.

Exercice 6.20. Etudier la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ et tracer le graphe de cette fonction. On effectuera en particulier une étude précise au voisinage de 0 de cette fonction.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 6.21. Former le développement limité en 0 à l'ordre indiqué entre parenthèses de chacune des fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + \sin x)$ (3);
2. $\frac{1}{1 - \sin x}$ (3);
3. $\ln(\cos x)$ (4);
4. $\sin(2x) \cos x$ (4);
5. $\tan^2 x$ (6);
6. $(\arcsin x)^2$ (6);
7. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (4);
8. $\frac{e^x - 1}{1 - \ln(1+x)}$ (3);
9. $e^{\arcsin x}$ (3).

Exercice 6.22. Former le développement limité/asymptotique en a à l'ordre n de la fonction f dans les cas suivants :

- (1) $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{2+x}}$ avec $a = +\infty$ et $n = 3$.
- (2) $f(x) = \int_0^x \cos^2 t \, dt$ avec $a = 0$ et $n = 9$.
- (3) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ avec $a = 0$ et $n = 8$.

Exercice 6.23. Soit f la fonction définie sur $[-1, 0[\cup]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$.

- (1) Former le développement limité de $\arcsin$ en 0 à l'ordre 5.
- (2) En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
- (3) Justifier que f admet un prolongement par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
- (4) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et préciser la position du graphe de $\tilde{f}$ par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 6.24 (Vers la transcendance de e). On suppose qu'il existe trois entiers a, b et c tels que $ae^2 + be + c = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = ae^x + ce^{-x}$.

- (1) Justifier que $f(1)$ est un entier, ainsi que $f^{(k)}(0)$ pour tout entier $k \geq 0$.
- (2) Soit $n \geq 1$. Démontrer qu'il existe un réel $\theta_n \in [0, 1]$ tel que $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n}$ soit un entier.

Indication : appliquer la formule de Taylor-Lagrange.

- (3) Justifier que la suite $(f^{(n)}(\theta_n))_n$ est bornée.

- (4) Démontrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $f^{(n)}(\theta_n) = 0$.
- (5) Dans cette question, on veut conclure que nécessairement $a = b = c = 0$.
- (a) Supposons que $a \neq 0$. On va distinguer deux cas.
- (i) Si $c \neq 0$, conclure à une absurdité en utilisant la question (4) et en distinguant deux cas suivant que a et c sont deux mêmes signes, puis en considérant un entier $n \geq N$ pair ou impair suivant le cas.
- (ii) Si $c = 0$, conclure à une contradiction en utilisant encore la question (4).
- (b) Conclure.

Exercice 6.25. ★ Notez qu'il y a des exercices **corrigés** sur le site
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00163.pdf>

7. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 7.1. Intégrer sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) $y' - 2xy = x$, | (2) $y' + y = \sin 2x$, |
| (3) $y' + 2y = e^x$, | (4) $y' + y = \cos x + \sin x$, |
| (5) $y' - 5y = e^{5x}$, | (6) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, |
| (7) $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$, | (8) $(1 + x^2)y' + 2xy = x + e^x$. |

Exercice 7.2. Résoudre des équations différentielles sur des intervalles I spécifiés :

- | | |
|--|---|
| (1) $xy' + y = \sin x$, $I =]0, +\infty[$, | (2) $\sin(x)y' + \cos(x)y = \sin^2(x)$, $I =]0, \pi[$; |
| (3) $xy' + y = e^x$, $I =]0, +\infty[$; | (4) $\sin(x)y' - \cos(x)y = 1$, $I =]0, \pi[$; |
| (5) $\sqrt{1 - x^2}y' + y = 1$, $I =]-1, 1[$; | (6) $(x + 1)y' + y = 1 - 2x$, $I =]-1, +\infty[$. |

Exercice 7.3. On considère l'équation différentielle $(E) : xy' - (1 + x)y = x^2$.

- (1) Résoudre l'équation (E) sur $I_1 =]0, +\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty, 0[$.
- (2) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.4. On considère l'équation différentielle $(E) : x(1 - x)y' + y = x$.

- (1) Résoudre l'équation (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
- (2) Montrer que (E) admet une unique solution sur $]-\infty, 1[$.
- (3) Montrer que (E) n'admet pas de solutions sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.5. Intégrer sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

- | | |
|---|---|
| (1) $y'' - y = x^2 + x$, | (2) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$, |
| (3) $y'' - 2y' + y = xe^x + 2 \cos x$, | (4) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \sin x$, |
| (5) $y'' + y' = x + \sin x$, | (6) $y'' + y' - 2y = e^x \sin x$, |
| (7) $y'' + 2y' + 5y = \cos(x)$, | (8) $y'' + y' + y = 13 \cos(2x)$. |

Exercice 7.6. Déterminer les solutions réelles de chacune des équations différentielles suivantes :

- (1) $my'' - (1 + m^2)y' + my = xe^x$, où $m \in \mathbb{R}$.
- (2) $y'' + y = \tan x$ sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- (3) $y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{(1+x)^3}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y(x) = e^x z(x)$.

Exercice 7.7. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω un nombre réel non nul.

- (1) On pose $u : x \rightarrow \cos(\omega x)$ et $v : x \rightarrow \sin(\omega x)$ définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que u et v sont des vecteurs de E linéairement indépendants.
- (2) Soit F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Démontrer que F constitue un sous-espace vectoriel de E .
- (3) Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de F .
- (4) On pose $f : x \rightarrow \cos(\omega x + a)$ et $g : x \rightarrow \sin(\omega x + a)$, où a est un réel fixé. Écrire f et g dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C} = (f, g)$ est une base de F .
- (5) Exprimer la fonction u dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 7.8. ★ Notez qu'il y a des exercices **corrigés** sur le site
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00109.pdf>