

Exercice 3.10. On considère l'espace des suites réelles qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et trois suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$, $v = (v_n)_{n \geq 0}$ et $w = (w_n)_{n \geq 0}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \cos(n) + \sin(n), \quad v_n = \ln(n+1), \quad w_n = 2n.$$

Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Rightarrow \alpha \cos n + \alpha \sin n + \beta \ln(n+1) + \gamma 2n = 0.$$

$$\text{avec } n=0, \text{ on a } \alpha \cos 0 = \alpha = 0.$$

$$\Rightarrow \beta \ln(n+1) + \gamma 2n = 0 \Rightarrow \beta \frac{\ln(n+1)}{2n} + \gamma = 0, \text{ si } n > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Donc $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ donc $\{u, v, w\}$ est une famille libre.

Exercice 3.11. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou non dans E . Dans le cas où elles sont liées, donner une combinaison linéaire non triviale.

- (1) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (2) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = \cos^2(x)$, $f_2(x) = \sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = e^{r_1 x}$, $f_2(x) = e^{r_2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$.
- (4) $\{f_1, f_2\}$ avec $f_1(x) = e^{rx}$, $f_2(x) = x e^{rx}$, $x \in \mathbb{R}$, avec $r \in \mathbb{R}$.
- (5) $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ avec $f_k(x) = e^{kx}$, $0 \leq k \leq n$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Indication : pour la dernière famille, on pourra penser à utiliser que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$.

$$(1) \text{ libre si } f_1 \neq \lambda f_2, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \neq \lambda \text{ et } \frac{f_1}{f_2} = \tan, \text{ pas constante.}$$

$$(2) \cdot \lambda \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \text{équivalent à (1)}$$

$$(3) \frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{x(r_1 - r_2)} \text{ pas constante car } r_1 \neq r_2 \text{ donc libres.}$$

$$(4) \frac{e^{rx}}{x e^{rx}} = \frac{1}{x} \text{ pas constante. Donc libre.}$$

$$(5) \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = \vec{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

$$\text{Puisque } f_i \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = \alpha_0 f_0 = \alpha_0. \text{ Donc } \alpha_0 = 0.$$

$$\text{Donc } \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \dots + \alpha_n e^{nx} = e^x (\alpha_1 + \alpha_2 e^x + \dots + \alpha_n e^{(n-1)x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^x + \dots + \alpha_n e^{(n-1)x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha_1 + \alpha_2 e^x + \dots + \alpha_n e^{(n-1)x} = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Par récurrence, sur k , on a $a_k = 0$. Donc $\{f_0, \dots, f_n\}$ une famille libre.

Exercice 3.12. (1) Montrer que si $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 2)$ et $u_3 = (2, 0, 1)$, alors la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, 0, t)$, $(1, 1, t)$ et $(t, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Une base de $\mathbb{R}^3$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, donc toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ ont 3 vecteurs. Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base si elle est libre.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ -3\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.13. (1) Soit $P_1(X) = 1 + X + 3X^2$, $P_2(X) = -2 + X + X^2$ et $P_3(X) = 3 + 2X + 5X^2$.

Est-ce que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

(2) Même question avec $\{P_1, P_2\}$?

(3) Même question avec $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, où $P_4(X) = 2 + 7X + X^2$.

Dans le cas où la famille n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$, indiquer si c'est la propriété d'être libre ou génératrice qui fait défaut.

$$\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha(1 + X + 3X^2) + \beta(-2 + X + X^2) + \gamma(3 + 2X + 5X^2)$$

$$\Rightarrow \alpha - 2\beta + 3\gamma + X(\alpha + \beta + 2\gamma) + X^2(3\alpha + \beta + 5\gamma) = 0.$$

