

TD 11: Maths.

Exercice 3.13. (1) Soit $P_1(X) = 1 + X + 3X^2$, $P_2(X) = -2 + X + X^2$ et $P_3(X) = 3 + 2X + 5X^2$.
Est-ce que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

(2) Même question avec $\{P_1, P_2\}$?

(3) Même question avec $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, où $P_4(X) = 2 + 7X + X^2$.

Dans le cas où la famille n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$, indiquer si c'est la propriété d'être libre ou génératrice qui fait défaut.

(2) Non car $\dim(\{P_1, P_2\}) \neq \dim \{P_1, P_2, P_3\} = 3$.

Elle n'est pas génératrice, car si elle l'était, on pourrait retirer des vecteurs pour que ce soit une base, mais $\dim \{P_1, P_2\} < 3$.

(3). M argument, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ n'est pas libre.

Exercice 3.14. Déterminer le rang des familles suivantes. On donnera, le cas échéant, les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs proposés et une base du sous-espace engendré par ces vecteurs.

(1) $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 1)$.

(2) $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, où $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (-1, 1, -1)$ et $w_4 = (1, -2, 3)$.

$$\text{Rang } \mathcal{B} = \dim(\text{Vect } \mathcal{B})$$

$$(1) \begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma + \beta = 0 \\ \gamma + \alpha = 0 \\ 2\gamma + 2\beta + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma + \beta = 0 \\ -\beta + \alpha = 0 \\ 0\beta + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

Donc V est une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\text{rang } V = 3$.

$$(2) \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma + 3\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma + \delta = 0 \\ -\beta + 2\gamma - 3\delta = 0 \\ -2\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma \in \mathbb{R}.$$

on prend $\gamma = 1$, w_3 est le seul des autres, donc on le supprime.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma = 0.$$

Donc $\text{rang } W = 3$.

Exercice 3.15. Dans $\mathbb{R}^4$, si $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 2, 0, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1, 0)$, montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre et déterminer un vecteur avec lequel la famille se complète en une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \text{ OK.}$$

$$u_4 \neq \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha + 2\beta = b \\ \gamma = c \\ 0 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a & a = 0 \\ \beta = b - a & \Rightarrow a = b \\ \gamma = c & c \in \mathbb{R} \\ 0 = d & \Rightarrow d \neq 0 \end{cases}$$

$u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ complète la famille.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & w_3 \end{matrix} \rightarrow \text{libre.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nwarrow$ w_4

$$\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, w_4\} = \mathbb{R}^4$$

$$\text{car Vect}\{u_1, u_2, w_3, w_4\} = \mathbb{R}^4.$$

