

- Exercice 3.16.** (1) Montrer qu'une famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ tels que $\deg P_k = k$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
- (2) En déduire que toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est une famille libre.
- (3) Application. Si $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$ et $P_3(X) = X(X-1)(X-2)$, montrer que la famille $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et décomposer le vecteur X^3 dans cette base.

$$Q(X) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0$$

Le coefficient de Q au degré n est $\alpha_n a$, avec a le coefficient de P_n au degré n .

$$\alpha_n a = 0, \text{ Mais } a \neq 0. \text{ Donc } \alpha_n = 0.$$

Par récurrence.

- (2) Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de polynômes deux-à-deux distincts, alors $\mathcal{F}$ est libre. En effet, on peut rajouter à $\mathcal{F}$ des autres polynômes, de sorte à obtenir une famille $\mathcal{G} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$. On revient à (a).

Donc $\mathcal{G}$ libre $\Rightarrow \mathcal{F}$ libre car $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

- (3). $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$, $P_3(X) = X(X-1)(X-2)$.

$\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre (cf. (1)) et une base car

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = \text{card } \mathcal{B}.$$

Décomposons X^3 dans cette base:

$$X^3 = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X(X-1) + \alpha_3 X(X-1)(X-2)$$

$$X=0 \Rightarrow \alpha_0 = 0.$$

$$X=1 \Rightarrow \alpha_1 = 1.$$

$$X=2 \Rightarrow 2\alpha_2 - 1 = 8 \Rightarrow \alpha_2 = 3.$$

$$X=3 \Rightarrow 3 + 3 \times 6 + \alpha_3 \times 6 = 27. \Rightarrow 6\alpha_3 = 6 \Rightarrow \alpha_3 = 1.$$

$$X^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en base } \mathcal{B}$$

Exercice 3.17. Soit $u_1 = (1, -1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, -1, 3)$, $u_3 = (4, 1, 2, 1)$, $u_4 = (2, -1, -1, 1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -6 & -5 \\ 3 & -3 & -11 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 43 & 10 \\ 3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 10 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

libre! Une base de F est donc $\{u_1; u_2; u_3; u_4\}$.

Exercice 3.18. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$. Déterminer une base de F , de G de $F \cap G$ et de $F + G$.

F et G sont des plans.

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\text{base de } F: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{base de } G: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 0x - 2y + 7z = 0 \end{cases} \quad z \text{ paramètre libre.}$$

$$\text{base: } z = 3 \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$F + G$:

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3.$$

$$F + G = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

base de $F + G$.



