

Exercice 3.19. (1) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : x = y \text{ et } z + t + u = 0\}.$$

Déterminer une base et la dimension de F .

(2) Même question avec le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

1. y, z, t para libres. $\Rightarrow \dim F = 3$.

$$\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{array}{l} * y=1 \quad t=0 \quad u=0 \\ * y=0 \quad t=1 \quad u=0 \\ * y=0 \quad t=0 \quad u=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$2. \begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ 2x+y+z+t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ y+3z-3t=0 \end{cases} \quad z, t \text{ para libres.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2z + t \\ y = -3z + 3t \end{cases} \quad \dim G = 2.$$

$$* \text{Base } \begin{array}{l} z=0 \quad t=1 \\ z=1 \quad t=0 \end{array} \quad \mathcal{B}_G = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 3.20. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\mathcal{S}_1 = \{u = (u_n)_{n \geq 0} : u_{n+3} = u_n, n \geq 0\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{S}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) On considère les trois suites u, v et w de $\mathcal{S}_1$ définies par

$$u = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad v = (0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots), \quad w = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots),$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de la congruence de n modulo 3.

(3) Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(4) Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_1$ et en déduire la dimension de $\mathcal{S}_1$.

$$\begin{array}{l} u, v \in \mathcal{S}_1. \quad (\lambda u)_{n+3} = (\lambda u)_n \Rightarrow \lambda u \in \mathcal{S}_1. \\ u_{n+3} + v_{n+3} = u_n + v_n = (u+v)_{n+3} = (u+v)_n. \text{ ok.} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in \mathcal{S}_1. \\ \text{car } u_n = 0 = u_{n+3}. \end{array} \right.$$

$$2. \quad u_n = 1 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ sinon } 0$$

$$v_n = 1 \text{ si } n \equiv 1 \pmod{3} \text{ sinon } 0$$

$$w_n = 1 \text{ si } n \equiv 2 \pmod{3} \text{ sinon } 0.$$

$$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}.$$

$$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0 \pmod{3}.$$

n	$\equiv 3$
0	$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0 \equiv \alpha u_n = 0$. Mais $u_n = 1$ donc $\alpha = 0$.
1	$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0 \equiv \beta v_n = 0$ Mais $v_n = 1$ donc $\beta = 0$.
2	$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0 \equiv \gamma w_n = 0$ Mais $w_n = 1$ donc $\gamma = 0$.

Donc $\{u, v, w\}$ libre.

3. $\{u, v, w\}$ génératrice de $\mathcal{S}_1$.

$$(x, y, z, x, y, z, \dots) \in \mathcal{S}_1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

n	$\equiv 3$
0	$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = x \equiv \alpha u_n = x$. Mais $u_n = 1$ donc $\alpha = x$ donc : $\exists \alpha, \beta, \gamma$ tq
1	$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = y \equiv \beta v_n = y$ Mais $v_n = 1$ donc $\beta = y$. $\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = (x, y, z, \dots)$
2	$\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = z \equiv \gamma w_n = z$ Mais $w_n = 1$ donc $\gamma = z$

Exercice 3.21. (1) Déterminer une base, la dimension et indiquer la nature géométrique de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

(b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, z = 3x\}$.

(c) $H = \{(\lambda, \mu - 2\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

(2) Reprendre les mêmes questions pour $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$.

(3) Parmi les couples de sous-espaces vectoriels (F, G) , (F, H) et (G, H) , déterminer ceux qui sont supplémentaires.

F . Un plan dans $\mathbb{R}^3$. y et z para libres. $\dim F = 2$
et $\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

G . $\begin{cases} -z + x + 2y = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + \cancel{x} + 2y = 0 \\ -2x = 0. \end{cases} \Rightarrow y \text{ para libre.}$
 $\dim G = 1$. et $\mathcal{B}_G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu - 2\lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

$\dim H = 2$. $\mathcal{B}_H$ λ, μ para libres

$$\mathcal{B}_H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F \cap G = \begin{cases} z + x + y = 0 \\ -z + x + 2y = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ -2x - y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 2y = 0 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$$

$$F \cap G = \{ \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \}$$

