

Exercice 3.21. (1) Déterminer une base, la dimension et indiquer la nature géométrique de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

- (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
 (b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, z = 3x\}$.
 (c) $H = \{(\lambda, \mu - 2\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

(2) Reprendre les mêmes questions pour $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$.

(3) Parmi les couples de sous-espaces vectoriels (F, G) , (F, H) et (G, H) , déterminer ceux qui sont supplémentaires.

$$F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\} \text{ (Vu avant)} \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F \cap H = \begin{cases} x+y+z=0 \\ x=\lambda \\ y=\mu-2\lambda \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 2\mu. \end{cases}$$

μ para libre. $\dim F \cap H = 1$ et c'est une droite. $\mu = 1 \Rightarrow \lambda = 2$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$G \cap H = \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -3x+z=0 \\ x=\lambda \\ y=\mu-2\lambda \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu - \mu - \mu = 0 \\ -3\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda = \mu \\ 3\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow 0=0.$$

$$\dim_{G \cap H} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \mu = 3$$

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 3 \Rightarrow F + G = \mathbb{R}^3.$$

Donc F et G sont supplémentaires. $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 3.22. Soient $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, $u_3 = (2, 1, 0, 0)$, $u_4 = (3, 1, 1, 0)$, $u_5 = (-1, -1, 1, 0)$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3, u_4, u_5)$.

(1) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels F , G , $F \cap G$ et $F + G$.

(2) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? *pas supplémentaires.*

$$\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = F. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, u_1 \neq \lambda u_2. \Rightarrow \text{Famille libre.}$$

Donc une base de F . Donc $\dim F = 2$.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \\ \underline{y+z=0} \end{cases} \quad y \text{ para libre. } G = \text{Vect}\{u_3, u_4\}$$

Exercice 3.23. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 3, 5)$.

(1) Déterminer le rang de la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(2) Donner une base de F .

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta = \gamma \\ -\beta = \gamma \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ para libre.}$$

Donc $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{Vect}\{u_1, u_2\} \Rightarrow \text{rg}\{u_1, u_2\} = 2$.

$$\mathcal{B}_F = \{u_1, u_2\}$$

(3) On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$. Donner une base de G .

(4) Déterminer la dimension de $F \cap G$.

(5) Déterminer la dimension de $F + G$.

(6) Que peut-on en déduire pour $F + G$?

(7) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

G deux para libres donc $\dim G = 2$.

$$\begin{aligned} * x=1, y=0 &\Rightarrow z=2 \\ x=0, y=1 &\Rightarrow z=1 \end{aligned} \quad \mathcal{B}_G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim F + G \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dim F + G = 3.$$

$$\dim F \cap G = 1$$

Non car $\dim F \cap G \neq 0$. Mais $F + G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3.24. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E des applications f qui vérifient $f'(0) = f(0) = 0$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

(2) Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

$$\begin{aligned} \vec{0}_E &\in F. \\ f, g \in F &\Rightarrow f+g \in F. \\ \lambda \in \mathbb{R}, f \in F &\Rightarrow \lambda f \in F. \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{ok.}$$

2. $a, b = 0 \Rightarrow x \mapsto 0$. ok. $\vec{0}_F \in H$.

$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}$, $ax + b + cx + d = (a+c)x + (b+d) \in H$.

$\lambda(ax+b) = \lambda ax + \lambda b \in H$ ok.

Si $f \in F \cap H$, $f(x) = ax + b$ et $f(0) = f'(0) = 0$. $\Rightarrow f(0) = b$ et $f'(0) = a \Rightarrow (a, b) = (0, 0)$
 $\Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow F \cap H = \{\vec{0}_F\}$.

$F + H = E$.

Soit $f \in E$. On pose $b = f(0)$, $a = f'(0)$.

On pose $h(x) = ax + b$ et $g(x) = f(x) - h(x)$.

$h \in H$ et $g \in F$, $f = g + h$ Donc $F + H = E$.

Exercice 3.25. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré d et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : A \text{ divise } P\}$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. $\rightarrow$ ok.

(2) Trouver un supplémentaire de F .

Avec la division euclidienne, on écrit

$P = AQ + R$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg R < d$.

Soit $G = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P < d\}$. On déduit $F + G = \mathbb{R}[X]$.

et $F \cap G = \{0\}$ car si A divise P $\left| \begin{array}{l} \text{soit } \deg P \geq d \\ \text{soit } P = 0. \end{array} \right.$

