

Exo 3.26.

Exercice 3.26. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires et G le sous-espace des fonctions impaires.

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

1. facile.

$$2. F \cap G = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \wedge -f(x) = f(-x) \right\}$$

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ -f(x) = f(-x) \end{cases} \Rightarrow 0 = 2f(-x) \Rightarrow f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Soit $h \in E$, on pose $f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \in F$

et $g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2} \in G$

$$f(x) + g(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2} = h(x).$$

Donc $E = F \oplus G$

4.1. Applications linéaires.

Exercice 4.1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

- | | |
|---|---|
| (1) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (y, x)$; oui | (2) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x, a)$; non |
| (3) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (ax, ay)$; oui | (4) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x+1, y+a)$; non. |
| (5) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oui
$(x, y, z) \mapsto (x+z, y+z)$; | (6) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ oui.
$(x, y) \mapsto (2x, 0, x-y)$ |

① $f\left(\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda\beta + \delta \\ \lambda\alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\beta \\ \lambda\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right).$
 $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$

②. Non car $f(0_{\mathbb{R}^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

③ $f(\lambda x + y) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \gamma \\ \lambda\beta + \delta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda f(x) + f(y).$

$$\textcircled{4}. f(\lambda x + y) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda\alpha + \gamma \\ \lambda\beta + \delta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \gamma + 1 \\ \lambda\beta + \delta + a \end{pmatrix} = \lambda x + \begin{pmatrix} \gamma + 1 \\ \delta + a \end{pmatrix} = \lambda x + f(y) \text{ pas linéaire.}$$

$$\textcircled{5}. f(\lambda x + y) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda\alpha + \gamma \\ \lambda\beta + \delta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha + \gamma) + (\delta + \eta) \\ \lambda(\beta + \gamma) + (\varepsilon + \eta) \end{pmatrix} = \lambda f(x) + f(y) \text{ ok.}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{6}. f(\lambda x + y) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda\alpha + \gamma \\ \lambda\beta + \delta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\lambda\alpha + \gamma) \\ \lambda(\alpha + \beta) + (\gamma - \delta) \end{pmatrix} = \lambda f(x) + f(y) \text{ ok.}$$

4.2. Noyau et image d'une application linéaire.

Exercice 4.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (1) Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $f(E_1) = \{y \in F : \exists x \in E_1 \text{ tel que } y = f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
- (2) Soit F_1 un sous-espace vectoriel de F . Montrer que l'image réciproque de F_1 par f , i.e. $f^{-1}(F_1) = \{x \in E : f(x) \in F_1\}$, est un sous-espace vectoriel de E .

Ø On a $0_E \in E_1$ Donc $f(0_E) = 0_F$ comme f est linéaire. Donc $0_F \in f(E_1)$.

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x). \quad \lambda x \in E_1 \text{ donc } \lambda y \in F$$

$$\forall a, b, a, b \in F \quad \Rightarrow a + b = f(x) + f(y), \quad x, y \in E_1 = f(x+y), \quad x+y \in E_1.$$

donc $a + b \in F$. Donc $f(E_1)$ sev de F .

