

Exercice 4.3. Les applications suivantes de E dans F sont-elles linéaires? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.

- (1) $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, x)$.
- (2) $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, x + y + 1)$.
- (3) $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x + 2y - z$.
- (4) $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, xy)$.

1) f linéaire. ; 2) f pas linéaire 3) f linéaire, 4) f pas linéaire.

①. $\ker f \Leftrightarrow \text{solut}^\circ \text{ de } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \rightarrow \text{base} \rightarrow \emptyset.$

$$\text{Im } f = f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$$

il faut résoudre $f(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow x = y \text{ et } y = \frac{1}{3}(2b - a). \text{ Donc } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^2 \text{ et base} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

③. $x + 2y - z = 0. \Rightarrow z = x + 2y. x, y \in \mathbb{R}.$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$(a, b) = (1, 0); \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; (a, b) = (0, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R}. \rightarrow \text{base. } \{1\}.$$

Exercice 4.4. (1) Donner une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

(a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y, z) = 3x + 2y - z;$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_2(x, y) = (2x + y, 2x - y, x + y);$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_3(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - z, -x + 2y + 2z).$

(2) Soit Δ la droite (vectorielle) de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(-1, 1, -1)$. Donner, quand cela a un sens, une base de l'image et de l'image réciproque de Δ par les applications linéaires f_1, f_2 et f_3 .

$$\text{Im } f_1 = \mathbb{R} \rightarrow \text{base } \{1\}. \quad \exists x, 2y - z = 0. \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

