

Exercice 4.4. (1) Donner une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

(a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y, z) = 3x + 2y - z;$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_2(x, y) = (2x + y, 2x - y, x + y);$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_3(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - z, -x + 2y + 2z).$

(2) Soit Δ la droite (vectorielle) de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(-1, 1, -1)$. Donner, quand cela a un sens, une base de l'image et de l'image réciproque de Δ par les applications linéaires f_1, f_2 et f_3 .

* base de $\text{Ker } f_2$:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x, y = 0, \text{Ker } f_2 = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\} \rightarrow \text{base } \emptyset.$$

* base de $\text{Im } f_2$

$\{f_2(\vec{i}), f_2(\vec{j})\}$ génératrice de $\text{Im } f_2$?

$f_2(v) = a f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + b f_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ libre donc base de $\text{Im } f_2$.

$\dim(\text{Im } f) = \text{Rg}(f)$ On du Rang. Soit $f: E \rightarrow F$ linéaire et E, F de dimension finie.

Alors, $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{Rg}(f)$

2. $f_1\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = -3 + 2 + 1 = 0. \rightarrow f_1(\Delta) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}}\}, \text{base } \emptyset$

$f_2(\Delta) = f_2\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 + 2 - 1 \\ -2 + 1 \\ 1 + 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

base de $f_2^{-1}(\Delta)$ On a $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \in \Delta. \Rightarrow f_2^{-1}(\vec{0}_{\mathbb{R}^3}) \subset f_2^{-1}(\Delta)$
 $\Rightarrow \text{Ker } f \subset f_2^{-1}(\Delta).$

On suppose $v \in \mathbb{R}^2$ satisfait:

$f_2(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$ et soit $w \in f_2^{-1}(\Delta)$

$f_2(w) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(w - \lambda v) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ Donc $w - \lambda v \in \text{Ker}(f_2)$

$$\Rightarrow f_2^{-1}(1) = \text{Vect}(v) + \text{Ker}(f_2).$$

Donc, si $\mathcal{B}$ est une base de $\text{Ker}(f_2)$, on déduit que $\{v\} \cup \mathcal{B}$ est une base de $f_2^{-1}(1)$

il faut résoudre $f_2^{-1}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+y = -1 \\ 2x+y = -1 \\ 2x-y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ y = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

$$f_2^{-1}(1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

