

Exercice 4.5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)$.

- (1) Montrer que f est linéaire.
- (2) Déterminer une base et la dimension du noyau de f .

(3) En déduire le rang de f .

→ facile.

base et dim de $\ker f$.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - t = 0 \\ x - 2z + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - t = 0 \\ -3z + t = 0 \end{cases} \Rightarrow t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \dim \ker(f) = 1.$$

$$* \text{ base: } t=3 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Donc } \dim \mathbb{R}^4 = \text{Rg } f + \dim \ker f \Rightarrow \text{Rg } f = 3.$$

Exercice 4.6. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$.

- (1) Donner une base de l'image et une base du noyau de f . Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
- (2) Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de $\mathcal{P}$? Reconnaissez-vous la nature géométrique de $\mathcal{P}$? Donner une base de $f(\mathcal{P})$ et une base de $f^{-1}(\mathcal{P})$.

base du noyau:

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow z \text{ para libre} \Rightarrow \dim \ker(f) = 1.$$

$$\text{Base de } \ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Rg}(f) = 2$$

$$\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \text{ famille génératrice de } \text{Im}(f). \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base de } \text{Im} f.$$

$$\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Im} f \text{ est un plan vectoriel de vecteur normal } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -2x + 2y - z = 0 \right\}.$$

2. $\text{Ker } \mathcal{D}$ $x - y = 0$. y para libre donc $\text{Ker } \mathcal{D} = 1$.

*Thm du Rang. $\text{Rg } \mathcal{D} = \dim \mathbb{R}^3 - \text{Ker } \mathcal{D} = 3 - 1 = 2$.

Base de $\mathcal{D}$: $y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\left\{ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\}$ famille génératrice de $f(\mathcal{D})$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ libre $\Rightarrow$ base de $f(\mathcal{D})$.

Base de $f^{-1}(\mathcal{D})$:

$f^{-1}(\mathcal{D}) = \left\{ v \in \mathcal{D} \mid f(v) \in f(\mathcal{D}) \right\}.$

$f^{-1}(\mathcal{D}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{D} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -2x + 2y + z = y - 3z \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -2x + y + 4z = 0 \right\}.$

$\Rightarrow y, z \in \mathbb{R}.$

$y=1, z=0; \quad y=0, z=1.$

Base de $f^{-1}(\mathcal{D}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 4.7. (1) Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(1)$.

(i) Montrer que f est linéaire.

(ii) Déterminer une base et la dimension de l'image et du noyau de f .

(2) Soit $g : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(P) = (P(1), P'(1))$.

(i) Montrer que g est linéaire.

(ii) Déterminer une base et la dimension de l'image et du noyau de g .

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda f(P) + f(Q).$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R} \Rightarrow \text{base } \{1\} \rightarrow \text{rg } f = 1 \Rightarrow$$

Par le théorème du rang, on a que $\dim \ker f = n$.

$$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}.$$

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0. \Rightarrow a_1 \dots a_n \text{ sont libres.}$$

$$\text{On a donc : } a_1 = 1; a_2 \dots a_n = 0.$$

$$a_1 = 0, a_2 = 1; a_3 \dots a_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_1 \dots a_{n-1} = 0, a_n = 1.$$

$$\Rightarrow a_0 = -1.$$

$$\ker f = \text{Vect} \{X-1, X^2-1, \dots, X^n-1\} \text{ est une base.}$$

$$2. g(\lambda P + Q) = \begin{pmatrix} (\lambda P + Q)(1) \\ (\lambda P + Q)'(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q(1) \\ Q'(1) \end{pmatrix} = \lambda g(P) + g(Q).$$

Si $n=0$:

$$a \mapsto (a, 0) \Rightarrow \text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $n \geq 1$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

* Noyau. Si $n=0$, $\ker f = \{0_{\mathbb{R}_0}\}$.

$$\text{Si } n \geq 0, (P(1), P'(1)) = (0, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} P(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \\ P'(1) &= a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_2, a_n \text{ para libres.}$$

$$a_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_n$$

$$a_1 =$$

