

Exercice 4.8. Soit $v = (1, 2, 1)$ et soit p_v la projection orthogonale sur v qui est définie par : $u \rightarrow p_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$ ($u \in \mathbb{R}^3$), où $u \cdot v$ est le produit scalaire entre u et v .

- (1) Vérifier que p_v est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $p_v \circ p_v = p_v$.
- (2) Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $p_v(u)$.
- (3) Déterminer $\text{Ker}(p_v)$ et $\text{Im}(p_v)$, en précisant leur nature géométrique.
- (4) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p_v) \oplus \text{Im}(p_v)$? Justifier la réponse.

$$1. p_v(\lambda a + b) = \frac{(\lambda a + b) \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{(\lambda a) \cdot v}{\|v\|^2} v + \frac{b \cdot v}{\|v\|^2} v = \lambda p_v(a) + p_v(b).$$

$$p_v(p_v(u)) = p_v\left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v\right) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} p_v(v) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \frac{v \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = p_v(u). \quad \text{ok.}$$

$$2. p_v(u) = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x + 2y + z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x + 2y + z}{6} \\ \frac{x + 2y + z}{3} \\ \frac{x + 2y + z}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(p_v) = p_v(u) = \vec{0} \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Rightarrow \text{plan vectoriel orthogonal à } v.$$

$$p_v(v) = v \Rightarrow p_v(\lambda v) = \lambda v \Rightarrow \text{Im}(p_v) = \text{Vect}(v).$$

$$4. \text{ On déduit } \mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p_v) \oplus \text{Im}(p_v).$$

Exercice 4.9. Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E , i.e. $p \in \mathcal{L}(E, E)$. On suppose que $p \circ p = p$ (un tel endomorphisme s'appelle un projecteur). Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

$$\begin{cases} \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\} \\ \text{Ker}(p) + \text{Im}(p) = E \end{cases}$$

$$\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$$

$$\text{Soit } u \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p). \Rightarrow \exists v \in E \text{ tq } u = p(v) \Rightarrow p(u) = p \circ p(v) = p(v) = u. \Rightarrow p(u) = 0_E \Rightarrow u = 0_E.$$

$$\text{Mais } p(u) = 0_E \Rightarrow u = 0_E.$$

$$*. \text{ Soit } u \in E \text{ et } v = u - p(u) \Rightarrow p(v) = p(u) - p \circ p(u) = p(u) - p(u) = 0_E. \Rightarrow v \in \text{Ker}(p). \text{ Mais } u = v + p(u) \text{ et } p(u) \in \text{Im}(p).$$

Donc ok.

Exercice 4.10. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -e_1$ et $f(e_3) = e_3$.

- (1) Déterminer l'image par f d'un élément $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
- (3) Montrer que $f \circ f = f$.

$$1. f(u) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \Rightarrow xe_1 - ye_1 + ze_3 \Rightarrow (x-y)e_1 + ze_3.$$

$$2. \text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(\underbrace{e_1, e_3}_{\text{libre}}).$$

$$\text{Ker } f \Rightarrow \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(e_1 + e_2).$$

e_1, e_2 base de $\text{Ker } f$.

$$f(u) = f \circ f(u). \quad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

$$f(u) = f((x-y)e_1 + ze_3) = (x-y)f(e_1) + zf(e_3) = (x-y)e_1 + ze_3. \quad \text{ok.}$$

Exercice 4.11. Donner dans chaque cas la dimension du noyau de f , puis le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

$$(1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y, z, x).$$

$$(2) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x+y, y+z, x-z).$$

$$1. \text{Ker } f \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases} \right) \Rightarrow \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \text{base } \checkmark.$$

$$\text{On du Rang} \Rightarrow \text{Rg } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f \Rightarrow f \text{ bijective.}$$

$$2. \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ni injectif, ni surjectif.

(3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + ay - z, 2x + 2y, x - 2z)$, où a est un paramètre réel.
 Pour le (1) calculer f^{-1} , et pour (3) calculer f_2^{-1} .

$$\begin{cases} 2x + ay - z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2x + ay - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ ay + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ (1-a)z = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$, $x, y, z = 0 \Rightarrow f$ bijective.
 $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \rightarrow \text{base } \emptyset$.

Si $a = 1$, $z \in \mathbb{R}$. et $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \right\}, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.12. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même, définie par $f(P) = P - P'$ est linéaire. L'application f est-elle injective? surjective?

$$f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q - (\lambda P + Q)' = \lambda(P - P') + (Q - Q') = \lambda f(P) + f(Q).$$

$$\text{Im } f = \{f(1), f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4)\}$$

$$= \{1, x-1, x^2-2x, x^3-3x^2, x^4-4x^3\} = \mathcal{B}'$$

$$\alpha + \beta(x-1) + \gamma(x^2-2x) + \delta(x^3-3x^2) + \epsilon(x^4-4x^3)$$

$$\alpha - \beta + x(\beta - 2\gamma) + x^2(\gamma - 3\delta) + x^3(\delta - 4\epsilon) + \epsilon x^4.$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma - 3\delta = 0 \\ \delta - 4\epsilon = 0 \\ \epsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{tous} = 0.$$

Donc $\mathcal{B}'$ libre, $\text{rg } f = 5 = \dim \mathbb{R}_4[X]$ donc f bijective car surjective + endomorphisme.

