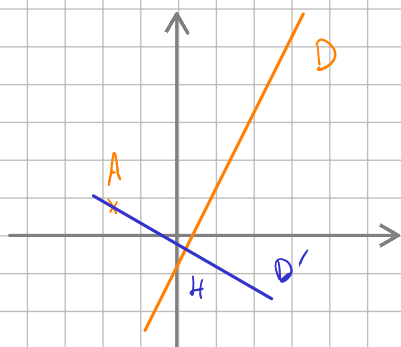


Exercice 1.5. Calculer la distance du point A à la droite D dans les cas suivants :

- (1) $A(-2, 1)$ et $D : y = 2x - 1$,
- (2) $A(1, 2)$ et D est la droite passant par $B(-2, 1)$ et $C(1, 3)$,
- (3) $A(-2, 2)$ et D est la droite passant par $B(-2, 3)$ et dirigée par $\vec{u} = 3\vec{i}$.



Il faut calculer AH !

$A \in D'$ et $D \perp D'$

Vecteur directeur de $D' \Rightarrow$ vecteur normal de D

$\vec{n}_D \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ car $D: 2x - y = 1$

$$D' = \left\{ A + t\vec{n}_D; t \in \mathbb{R} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -2+2t \\ 1-t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$H = D \cap D'$

Donc H est la solution du système
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$2(-2 + 2t) - (1 - t) = 1$$

$$\Leftrightarrow -4 + 4t - 1 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow 5t = 6 \Leftrightarrow t_0 = \frac{6}{5}$$

Donc $H = \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ avec $t = t_0$.

$H\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ $\vec{AH} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{10}{5} \\ -\frac{1}{5} - \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$ Donc $AH = \frac{1}{5} \sqrt{144 + 36} = \frac{6}{5}$

2. $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$; $C(1, 3)$. $B, C \in D$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur dir de D ,
vect normal de D'

$D': 3x + 2y + c = 0, A \in D'$

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -7$

$D': 3x + 2y - 7 = 0$

$\{B + t\vec{v}; t \in \mathbb{R}\}$ repr D ,

$\left\{ \begin{pmatrix} -2+3t \\ 1+2t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$

$H = \begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$3(-2 + 3t) + 2(1 + 2t) - 7 = 0 \Leftrightarrow -6 + 9t + 2 + 4t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 13t = 11 \Leftrightarrow t_0 = \frac{11}{13}$

$$H \begin{pmatrix} -2 + 3\left(\frac{11}{13}\right) \\ 1 + 2\left(\frac{11}{13}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} - \frac{26}{13} \\ \frac{22}{13} + \frac{22}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} \\ \frac{25}{13} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{7}{13} - 1 \\ \frac{25}{13} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} \\ -\frac{9}{13} \end{pmatrix}$$

$$AH = \frac{1}{13} \sqrt{36 + 81} = \frac{1}{13} \sqrt{117} = \frac{3}{13} \sqrt{13} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

3. (3) A(-2, 2) et D est la droite passant par B(-2, 3) et dirigée par $\vec{u} = 3\vec{i}$.

$$D = \left\{ B + t\vec{u}; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2+t \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$D': x = -2, \quad H \begin{pmatrix} -2+t_0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ avec } -2+t_0 = -2 \Rightarrow t_0 = 0 \Leftrightarrow H \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AH = 1.$$

Exercice 1.6. Soient A(3, 2), B(1, 2) et C(4, 4) des points du plan.

(1) Montrer que $\overrightarrow{OC}$ est la diagonale du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

(2) Calculer l'aire du parallélogramme OABC.

Si $\overrightarrow{OC}$ est la diagonale du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

$$\text{Alors } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ On a bien } \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{OC} \text{ diagonale du parallélogramme.}$$

$$d_{\text{max}} = |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})| = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = |3 \times 2 - 2 \times 1| = 6 - 2 = 4.$$

Exercice 1.7. Soit $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ et $\vec{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

(1) Vérifier que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée.

(2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ dans cette base.

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée $\Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ et $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$ (ok).

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0. \text{ ok.}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = (\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_1 = \alpha \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = \alpha$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = \beta.$$

$$\alpha = \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{v} = \frac{5}{\sqrt{2}} \vec{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{u}_2$$

Exercice 1.8.

- (1) Montrer que les points $A(4, 5, 2)$, $B(1, 7, 3)$ et $C(2, 4, 5)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- (2) Montrer que les points $A(2, 1, 6)$, $B(4, 7, 9)$ et $C(8, 5, -6)$ sont les sommets d'un triangle rectangle.

$$1. \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{AB}\| &= \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \\ \|\vec{BC}\| &= \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \\ \|\vec{AC}\| &= \sqrt{14} \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{Donc ABC est un triangle équilatéral dans l'espace.}$$

$$2. \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 + 24 - 3 \times 12 = 0.$$



Exercice 1.9. (1) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{w}$ dans les cas suivants :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \vec{a} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \vec{b} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

