

Exercice 4.19. Calculer lorsqu'ils sont définies les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

① $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4.21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Trouver toutes les matrices $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telle que $AB = BA$.
- (2) En déduire que $\{B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : AB = BA\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases} \Rightarrow b \in \mathbb{R}.$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}. \text{ commute avec } A.$$

$$\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \ni \mathcal{L} \text{ et si } u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda u \in \mathcal{L} \text{ et } u+v \in \mathcal{L}. \text{ OK.}$$

Exercice 4.22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , A^3 . En déduire la valeur de A^n , pour tout $n \geq 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

P_n: Conjecture: $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Recurrence :

Initialisatō: Déjà fait

Hérédité: On suppose P_n vrai pour un n quelconque, montrons P_{n+1} .

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{OK,}$$

Exercice 4.23. Indiquer si F est un sous espace vectoriel de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dans les deux cas suivants :

$$(a) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad (b) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4.24. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer AB et AC . Que constate-t-on?
- (2) La matrice A peut-elle être inversible? Justifier.

$AB = AC$ facile. Si A était inversible, on aurait : $A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow I_3 B = I_3 C \Rightarrow B = C$
Or $B \neq C$ donc A pas inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A.$$

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 6 = -4.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 2 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.25. Dire si les matrices suivantes sont inversibles et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$



