

Exercice 4.25. Dire si les matrices suivantes sont inversibles et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.26. (1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, et en déduire que

A est inversible. On donnera A^{-1} .

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

$$A^2 + A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A + I_3) = 2I_3 \Rightarrow A \frac{1}{2}(A + I_3) = I_3.$$

$$\frac{1}{2}(A + I_3) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3. \Leftrightarrow A(A^2 - I_3) = 4I_3.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

4.4. Matrice d'une application linéaire.

Exercice 4.27. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par : $f(x, y, z) = (2x + 2y - 3z, x - y - 2z, -x + y + 2z)$ et $g(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y - z)$.

- (1) Ecrire les matrices des applications f et g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ en utilisant le calcul matriciel.

$$\textcircled{1} M_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_g = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_f M_g = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x - 9y + 5z \\ -3y + 1 \\ 3y - 1 \end{pmatrix}$$

$$M_g M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4y + 2 \\ 4y + 2 \\ 2x - 2y - 4z \end{pmatrix}$$

Exercice 4.28. Soit $\phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto XP'$.

(1) Vérifier que ϕ est linéaire.

(2) Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\phi(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)' = \lambda XP' + XQ' = \lambda \phi(P) + \phi(Q). \quad \text{ok.}$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\phi) &= \left(\underline{\phi(1)}, \underline{\phi(X)}, \underline{\phi(X^2)}, \underline{\phi(X^3)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$3X^2 + 2X + 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

