

TD22: Maths.

Exercice 4.29. Soit f_a l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, dont la matrice dans la base

canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

- (1) Discuter l'injectivité de f_a suivant a et lorsque f_a n'est pas injective donner une base de $\text{Ker}(f_a)$.
- (2) Donner dans tous les cas le rang de f_a et une base de $\text{Im}(f_a)$.

On prend $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$\text{Mat}(f_a)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ ax + y - z \\ x - y + az \\ t \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(f_a) \Leftrightarrow \{v \in \mathbb{R}^4 / f_a(v) = \vec{0}\}.$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ ax + y - z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ (1-a)y - (1+a)z = 0 \\ -(1+a)z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{Si } a \neq \pm 1, z=0, y=0, x=0.$$

$\text{Ker}(f_a) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\} \rightarrow$ base $\emptyset$. On a aussi $\text{Ker}(f_a) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Si $a = \pm 1$, $\Rightarrow$ il y a un param libre $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(f_a)) = 1$

Si $a = 1$, on a:

$$\begin{cases} y = z \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{base} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Si $a = -1$, on a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{base} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Si $a \neq \pm 1$, $\text{Rg}(f_a) = 4$, $\text{Im}(f_a) = \mathbb{R}^4$.

Sinon, $\text{Rg}(f_a) = 3$.

Si $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{base} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $a = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{base} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 4.30. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ une base de E , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f l'application linéaire de E dans lui-même définie par : $f(a_1) = a_1 + a_2$, $f(a_2) = a_1 - a_2$ et $f(a_3) = a_1 + \lambda a_3$.

- (1) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (2) Déterminer le noyau de f et en donner une base, suivant les valeurs du paramètre λ . Déterminer dans tous les cas le rang de f .
- (3) Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme de E (càd un isomorphisme de E dans lui-même) ? Dans ce cas, calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

$$\text{Mat}(f_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ f(a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{cases} x-y = 0 \\ x+y+z = 0 \\ \lambda z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ 2y+z = 0 \\ \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lambda \neq 0 \Rightarrow x, y, z = 0 \Rightarrow \text{Ker}(f_{\mathcal{B}}) = \{\vec{0}\}$$

$$\text{Sinon, } z \in \mathbb{R} \quad \dim(\text{Ker}(f_{\mathcal{B}})) = 1. \quad \lambda = 1 \Rightarrow \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \text{Ker}(f_{\mathcal{B}}).$$

$$\bullet \lambda \neq 0, \text{Rg}(f_{\mathcal{B}}) = 3 \Rightarrow \text{Im}(f_{\mathcal{B}}) = \mathbb{R}^3.$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \text{Rg}(f_{\mathcal{B}}) = 2 \Rightarrow \text{base} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\bullet \text{Il faut que } \lambda \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1/\lambda \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & -\frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 4.31. Soit a et b deux réels et A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\text{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rg}(A) = 2$?

$$\text{rg}(A) \geq 2 \text{ car } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{rg}(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = a \\ y = 3 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x' \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x' - y' = b \\ y' = -4 \\ 4x' - y' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 4 = b \Rightarrow b = 3 \\ y' = -4 \\ x' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $a = 1$ et $b = 3$, alors $\text{rg} A = 2$.

