

Exercice 4.13. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit l'application u de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

- (1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
- (2) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
- (3) Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.
- (4) Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E .

$$1. \quad u(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + (1 - X)(\lambda P' + Q') = \lambda f(P) + f(Q).$$

$$2. \quad \{f(1), f(x), f(x^2), f(x^3)\} \rightarrow \text{Im}(u) = \text{Vect}\{1, 2x - x^2, 3x^2 - 2x^3\}$$

$$3. \quad u(x) - u(1) = 0 \Rightarrow u(x-1) = 0 \Rightarrow x-1 \in \text{Ker}(u) \Rightarrow \text{Ker}(u) = \text{Vect}\{x-1\}.$$

car $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$ par thm du rg.

$$4. \quad E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$$

Formule des dimensions:

Si $F, G \subset E$ sous espace de dim. finie. Alors:

$$\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$$

Soit $P \in \text{Ker}(u)$ et $Q \in \text{Im}(u)$

$$P + Q \in \text{Ker}(u) + \text{Im}(u).$$

$$P + Q \in \text{Vect}\{1, x-1, 2x-x^2, 3x^2-2x^3\}$$

↳ famille libre car en escalier.

$$\text{donc } \dim(\text{Ker}(u) + \text{Im}(u)) = 4.$$

On a alors bien $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 4.14. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_d)$ une famille de $d+1$ nombres réels deux à deux distincts. On définit $\varphi : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ par $\varphi_{\mathbf{t}}(P) = (P(t_0), P(t_1), \dots, P(t_d))$.

(1) Démontrer que $\varphi_{\mathbf{t}}$ est linéaire.

(2) Pour $0 \leq i \leq d$, on considère le polynôme P_i , défini par

$$P_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq d \\ k \neq i}} \frac{X - t_k}{t_i - t_k}.$$

Vérifier que $P_i \in \mathbb{R}_d[X]$.

(3) Déterminer $\varphi_{\mathbf{t}}(P_i)$.

(4) Que peut-on en déduire sur l'application $\varphi_{\mathbf{t}}$?

(5) Que peut-on dire de la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_d\}$?

(6) Montrer que pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ il existe un unique polynôme P tel que

$$P(t_i) = \lambda_i, \quad \forall 0 \leq i \leq d.$$

Expliciter P en fonction des λ_i et des P_i .

Les polynômes P_i s'appellent les polynômes d'interpolation de Lagrange.

$$1. \varphi_{\mathbf{t}}(\lambda P + Q) = \begin{pmatrix} (\lambda P + Q)(t_0) \\ \vdots \\ (\lambda P + Q)(t_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P(t_0) + Q(t_0) \\ \vdots \\ \lambda P(t_d) + Q(t_d) \end{pmatrix} = \lambda \varphi_{\mathbf{t}}(P) + \varphi_{\mathbf{t}}(Q).$$

$$2. P_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq d \\ k \neq i}} \frac{X - t_k}{t_i - t_k}, \quad \deg(P_i) = d.$$

$$3. \varphi_{\mathbf{t}}(P_i) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ème}}}{1}, 0, \dots, 0) \quad P_i(t_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_{\mathbf{t}}(P_i) = e_i \text{ avec } \{e_0, e_1, \dots, e_d\} \text{ base canonique de } \mathbb{R}^{d+1}.$$

$$\text{Im}(\varphi_{\mathbf{t}}) \supset \mathbb{R}^{d+1} \Rightarrow \text{Im}(\varphi_{\mathbf{t}}) = \mathbb{R}^{d+1} \Rightarrow \text{Rg}(\varphi_{\mathbf{t}}) = d+1 \text{ et } \text{Ker } \varphi_{\mathbf{t}} = \{\vec{0}\}.$$

5. $\{P_0, P_1, \dots, P_d\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_d[X]$. $\Rightarrow$ base.

6. Comme $\varphi_{\mathbf{t}}$ est un isomorphisme, on a cette relation.

$$\varphi_{\mathbf{t}}(P(\mathbf{t})) = (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \Rightarrow P(t_i) = \lambda_i.$$

$$\text{Or, } (\lambda_0, \dots, \lambda_d) = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_d e_d = \lambda_0 \varphi_{\mathbf{t}}(P_0) + \dots + \lambda_d \varphi_{\mathbf{t}}(P_d) = \varphi_{\mathbf{t}}(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_d P_d).$$

