

Exercice 4.16. Soit $g \in \mathcal{L}(E, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que G est un espace vectoriel de dimension finie. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de "factorisation" suivant

$$(\exists h \in \mathcal{L}(F, G) \text{ tel que } g = h \circ f) \iff \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

(1) On suppose d'abord qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$. Vérifier que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

(2) Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$. Considérons F_0 un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans F . Autrement dit, $F = \text{Im}(f) \oplus F_0$.

(i) Vérifier que, pour tous $x, x_1 \in E$ et tous $y, y_1 \in F_0$, on a

$$f(x) + y = f(x_1) + y_1 \implies g(x) = g(x_1).$$

(a) En déduire que si on pose, pour $z \in F$,

$$h(z) = g(x) \quad \text{où } z = f(x) + y, \quad x \in E, y \in F_0,$$

alors h est bien définie et est une application linéaire de F dans G .

(b) Vérifier alors que $g = h \circ f$.

1. $\forall x \in E, \quad g(x) = h(f(x))$. On veut $g(v) = h(f(v)) \quad \forall v \in \text{Ker } f$

$$g(v) = h(\vec{0}) = 0 \implies v \in \text{Ker}(g) \implies \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

2i. $\forall x, x_1 \in E, \quad y, y_1 \in F_0$.

$$f(x) + y = f(x_1) + y_1 \implies f(x - x_1) = y - y_1$$

$$x - x_1 \in \text{Ker } f \text{ si } y - y_1 \in F_0 \cap \text{Im } f \implies y = y_1$$

$$\text{Donc } x - x_1 \in \text{Ker } f \implies x - x_1 \in \text{Ker}(g) \implies g(x) = g(x_1)$$

a. $h(z) = g(x)$ où $z = f(x) + y, \quad x \in E, y \in F_0$

$$z \in F \text{ et } h(z) = g(x) \text{ donc } h(z) \in G$$

Cela découle de (2i).

$$\text{Donc } h: F \rightarrow G.$$

$$h(\lambda z + z') = g(\lambda x + x') = \lambda g(x) + g(x') = \lambda h(z) + h(z') \text{ bizarre.}$$

$$f(x) = f(x) + \vec{0}_F$$

$$h(f(x) + \vec{0}_F) = h(f(x)) = g(x)$$

Exercice 4.17. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $G \subset \text{Ker}(f)$ et notons H un supplémentaire de G dans E , i.e. $E = G \oplus H$. On rappelle alors que la projection p de E sur H parallèlement à G , définie par $p(g+h) = h$, où $(g,h) \in G \times H$, est linéaire.

- (1) Montrer qu'il existe une application linéaire $\tilde{f} : H \rightarrow F$ telle que $f = \tilde{f} \circ p$.
- (2) On suppose dans cette question que f est surjective et que $G = \text{Ker}(f)$. Montrer alors que l'application $\tilde{f}$ de la question précédente est un isomorphisme de H sur F .

1. $f : E \rightarrow F$ linéaire, $\dim E < +\infty$

G sev de E tq $G \subset \text{Ker} f$. H tq $E = G \oplus H$

$p : E \rightarrow H \Rightarrow p(g+h) = h, (g,h) \in G \times H$.

Soit $v \in E$. Comme $E = G \oplus H$, $\exists! (g,h)$ tq $v = g+h$.

Il q $\exists \tilde{f}$ tq $f = \tilde{f} \circ p$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow p & \nearrow \tilde{f} \\ & H & \end{array}$$

$H \subset E$. On pose $\tilde{f}(h) = f(h) \forall h \in H$.
Donc $\tilde{f}$ est linéaire.

Soit $v \in E$. a-t-on $f(v) = \tilde{f} \circ p(v)$

Or $v = h+g$ donc $\tilde{f} \circ p(v) = \tilde{f}(h) = f(h)$

D'autre part:

$f(v) = f(h+g) = f(h) + f(g) = f(h)$ car $f(g) = 0$.

f surjective $\Rightarrow \tilde{f}$ surjective car $f = \tilde{f} \circ p$.

$E = \text{Ker} f \oplus H$

Soit $h \in \text{Ker}(\tilde{f}) \Rightarrow \tilde{f}(h) = \vec{0}_F = f(h) \Rightarrow h \in \text{Ker}(f)$.

Mais $h \in H$. Donc $h \in \text{Ker}(f) \cap H \Rightarrow h = \vec{0}_E$.

Donc $\text{Ker}(\tilde{f}) = \{\vec{0}_E\}$.

Donc $\tilde{f}$ isomorphisme.

