

Exercice 4.32. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}' = (u, v)$, où $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$.

(1) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Calculer $f(u)$, $f(v)$. Déterminer la matrice A_1 de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, la matrice A_2 de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$ et la matrice A_3 de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1. u, v non colinéaires. OK .

$$2. P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(u) = Mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = Mv = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left(\underline{f(e_1)}_{\mathcal{B}'}, \underline{f(e_2)}_{\mathcal{B}'} \right)$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.34. Soit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ et $\mathcal{B}' = (u', v', w')$ les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w' = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Justifier que

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}_0} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0}.$$

(3) Calculer la matrice de passage P' de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(4) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ OK.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ OK.}$$

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}_0} \times P_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$$

$$= P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}_0} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

