

TD26: Maths.

Exercice 4.35. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
- (2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

- (3) Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, v_1 \neq \lambda v_2.$$

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -\frac{2}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.36. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, définie par : $f(x, y, z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z)$.

- (1) Écrire la matrice de f dans la base canonique.
- (2) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de f
- (3) Soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v\}$ le sous-espace des vecteurs invariants par f . Justifier que F est un espace vectoriel et déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de F .
- (4) Montrer que les deux espaces précédents sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- (5) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

$$\textcircled{1} \text{ Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 4 \\ 12 & -20 & 3 \\ 16 & -28 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\textcircled{2}. \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ 4x - 7y + \frac{5}{4}z = 0 \\ \frac{17}{4}x - 7y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + 3x - 5y = 0 \\ 5z + 16x - 28y = 0 \\ z + \frac{17}{4}x - 7y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z + 3x - 5y = 0 \\ 0z + 2x - y = 0 \\ 0z + 5x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + 3x - 5y = 0 \\ -y + 2x = 0 \\ 0y + 19x = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_1 = \emptyset$$

$$3. * f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ok.}$$

$$* \forall u, v \in F, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda u + v \text{ ok.}$$

