

TD 27 : Maths.

Exercice 4.37. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3$, $f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3$ et $f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$.

- (1) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (2) Déterminer $f(u)$ si $u = (1, 2, 3)$ ou $u = (1, 0, 1)$.
- (3) Soit $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -u\}$.
 - (a) Démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
 - (b) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
 - (c) On considère $\{u_1, v_1\}$ une base de F_1 et $\{w_1\}$ une base de F_2 . On note $\mathcal{B}' = (u_1, v_1, w_1)$.
 - (i) Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. ✓
 - (ii) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$2) f(u) = Au = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -26 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad u, v \in F_1, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda u + v \in F_1.$$

$$u, v \in F_2, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = -\lambda u - v = -(\lambda u + v) \in F_2.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow F_1 = \text{Ker}(A - I_3), F_2 = \text{Ker}(A + I_3)$$

$$\text{base de } F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } F_2: \left\{ \right.$$

Exercice 4.38. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie pour $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(u) = \begin{pmatrix} -x + 3y + 3z \\ 3x - y - 3z \\ -3x + 3y + 5z \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que f est une application linéaire. ✓

(2) Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

(3) On considère la famille $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4) Donner la matrice $P = \text{Mat}(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(5) Calculer P^{-1} .

(6) On note $B = \text{Mat}(f, \mathcal{B}')$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Donner la relation exprimant B en fonction de A , P et P^{-1} .

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f(u_1) = 2u_1 \\ f(u_2) = 2u_2 \end{array}$$

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP$$

(7) Calculer B .

(8) En déduire le calcul de A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B^n = P^{-1} A^n P$$

$$\Rightarrow A^n = P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n - 1 \\ 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

