

TD3: Maths.

Exercice 1.9. (1) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{w}$ dans les cas suivants :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Montrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{u} \perp (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

(3) Trouver les valeurs possibles de x pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ soient coplanaires.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-x \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{v}$ et $\vec{w}$

(On suppose que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires).

$\Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}(\vec{v}, \vec{w})$

Donc un vecteur $\vec{u}$ est dans $\mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$.

3a. $\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ coplanaires: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.

$$\vec{u} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -8x + 6 - 4 = 0 \Leftrightarrow -8x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

b. $\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ +2 \\ -3+x \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3+x \end{pmatrix} = -2x + 6 - 3 + x = 0 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Exercice 1.10. On considère $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1, -3, 2)$ et $B(1, 2, -1)$.

(1) Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

(2) En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \{ A + t \vec{AB}, t \in \mathbb{R} \}.$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x = 1 \\ 3y + 5z = 1. \end{cases}$$

$$3y + 5z = -9 + 15t + 10 - 15t = 1$$

Exercice 1.11. (1) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, 2, -1)$

et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) Donner une équation cartésienne de ce même plan $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = A + t\vec{u} + t'\vec{v}. \quad \mathcal{P} = \begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = 2 + 4t + t' \\ z = -1 - 2t' \end{cases}, t, t' \in \mathbb{R}. \quad A \in \mathcal{P}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}: -8x + 2y - 7z + d = 0$$

$$\text{Donc } -8 + 4 + 7 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3.$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}: -8x + 2y - 7z - 3 = 0.$$

Exercice 1.12. (1) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, 2, -1)$

et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) Donner une équation cartésienne de ce même plan $\mathcal{P}$.

$$(2). \quad \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x-1 + 2y-4 - z-1 = 0 \\ = x + 2y - z - 6 = 0$$

(1) On cherche deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$

$$\text{Résoudre } \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est orthogonal à } \vec{n}$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}: A + t\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est orthogonal à } \vec{n} \\ \text{est non colinéaire à } \vec{u}.$$

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t' \\ z = -1 + t + 2t' \end{cases}, t, t' \in \mathbb{R}$$

Exercice 1.13. Soient $A(1, 2, 4)$, $B(2, 3, 6)$, $C(1, 0, 2)$ et $D(2, 2, 2)$ des points dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

- (1) Trouver la distance entre le point D et le plan passant par A , B et C .
- (2) Trouver la distance entre le point D et la droite (AB) .
- (3) Trouver la distance entre la droite (AB) et la droite (CD) .

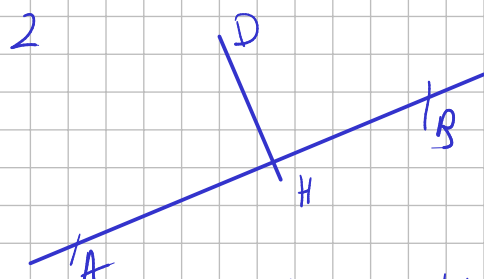
$$\text{dist}(D, \mathcal{P}_{A,B,C}) = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{dist}(D, \mathcal{P}_{A,B,C}) = \frac{2 \times 3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{n} = 2 + 4 = 2 \times 3$$



Soit $Q =$ plan passant par D et avec $Q \perp AD$.

Donc $H = D \cap Q$.

$$\vec{n}_Q = \text{normal à } Q = \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-2 + y-2 + 2z-2 = 0$$

$$Q: x + y + 2z - 8 = 0.$$

$$\mathcal{D} = A + t\vec{AB}$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 4+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \Rightarrow 1+t + 2+t + 8+4t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 6t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

$$H \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{HD} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$HD = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{14}$$

