

Exercice 5.10. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

(2) $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-6}}$, sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\text{ch}(u)$.

(3) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$, sur l'intervalle $]0, 1[$.

$$\textcircled{1} \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} = \sqrt{x^2-1} \quad u = x^2-1, \quad du = 2x dx$$

$$= \sqrt{x^2-1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \begin{array}{l} x = \text{ch}(u) \\ dx = \text{sh}(u) du \end{array}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{sh}(u)} du}{\cancel{\text{sh}(u)}} = u = \text{arccosh}(x)$$

$$\text{Donc } \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt{x^2-1} + \text{arccosh}(x).$$

$$x^2+x-6 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-6}} dx \quad x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ch}(u) \quad dx = \frac{5}{2} \text{sh}(u) du.$$

$$= \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}} = \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}\right)^2 - 1}} = \frac{2}{5} \int \frac{\cancel{\frac{5}{2} \text{sh}(u)} du}{\left(\frac{5}{2} \text{ch}(u) - \frac{1}{2}\right) \cancel{\text{sh}(u)}} = 2 \int \frac{du}{5 \text{ch}(u) - 1}$$

$$= 2 \int \frac{du}{\frac{5}{2}(e^u + e^{-u}) - 1} = 2 \int \frac{2e^u du}{5(e^{2u} + 1) - 2e^u} = 4 \int \frac{dy}{5y^2 - 2y + 5} \quad y = e^u \quad dy = e^u du$$

$$\begin{aligned} & 5\left(y^2 - \frac{2}{5}y\right) + 5 \\ & = 5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{24}{25} = 4 \frac{25}{24} \int \end{aligned}$$

Exercice 5.18. Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

(1) Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(2) Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Exercice 5.19. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

S.18. ①
$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

$$u = -x \quad du = -dx$$

$$\Rightarrow - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

paire | paire impaire

$$\Rightarrow \int_0^a f(-u) (-du) = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(3) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$, sur l'intervalle $]0, 1[$.

$$u = \sqrt[6]{x} \quad du = \frac{1}{6} x^{-5/6} dx \Rightarrow 6 u^5 du = dx.$$

$$\Rightarrow \int \frac{6 u^5 du}{u^3 + u^2} = 6 \int \frac{u^3}{u^2 + u + 1} du$$

$$\begin{array}{r} \cancel{u^3} \quad \cancel{u^2+u^2} \quad \cancel{+u} \\ u-1 \end{array} \quad \begin{array}{r} u+1 \\ u^2+u+1 \end{array}$$

$$u^3 = (u+1)(u^2+u-1) + 1$$

