

Exercice 5.12. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tous $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$, on a $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$. Montrer que $f \equiv 0$.

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$.

On suppose $c \in [a, b]$ tq $f(c) \neq 0$. S.P.G., $f(c) = v > 0$

Puisque f est continue, $\exists \varepsilon > 0$ tq $f(x) > \frac{v}{2}$

$\forall x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap [a, b] = [a', b']$

$$\text{On a } \int_{a'}^{b'} f(t) dt = \int_{a'}^{b'} \frac{v}{2} dt = \frac{b' - a'}{2} v > 0 \quad \text{!}$$

Exercice 5.13.

- (1) Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \geq 0$ et que $\int_0^1 g(x) dx = 0$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = 0$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) > 0$, puis utiliser la définition de la continuité de g en x_0 .

- (2) Déterminer toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues vérifiant

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx.$$

- ① $\exists x_0 \in [0, 1]$ tq $g(x_0) > 0$. $\exists \varepsilon > 0$ tq $g(x) > \frac{g(x_0)}{2}$
pareil qu'avant.

② $\int_0^1 (f(x) - f^2(x)) dx = 0 \Rightarrow f(x) \cdot f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f^2(x).$

Exercice 5.14. Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

- (1) Donner le domaine de définition de f .
- (2) Etudier la parité de f .
- (3) Etudier les variations de f .
- (4) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.
- (5) En déduire les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- (6) Dresser le tableau de variation de f et esquisser son graphe.

① $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \quad v = -t \quad dv = -dt \Rightarrow - \int_x^{2x} \frac{dv}{\sqrt{v^4+v^2+1}}$$

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f \text{ impaire.}$$

② On pose $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \Rightarrow f(x) = g(2x) - g(x)$.

$$f'(x) = g'(2x) - g'(x) = 2g'(2x) - g'(x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$\text{Soit } h(x) = f'(x) \left(\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \right)$$

$$= \frac{4}{16x^4+4x^2+1} - \frac{1}{x^4+x^2+1} =$$

Exercice 5.16. On considère $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ sur $[0, 1]$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

26

- (1) Montrer que pour toute fonction en escalier ψ sur $[0, 1]$ telle que, $\forall x \in [0, 1]$, on a $\psi(x) \geq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors

$$\int_0^1 \psi(x) dx \geq 1.$$

Indication : on introduira une subdivision adaptée à ψ et on utilisera la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

- (2) Montrer que pour toute fonction en escalier φ sur $[0, 1]$ telle que, $\forall x \in [0, 1]$, on a $\varphi(x) \leq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \leq 0.$$

- (3) En déduire que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemman intégrable sur $[0, 1]$.

$$x_i := \int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{k=0}^n \psi(x_k)$$

