

$$f(x) = \int_x \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} dt.$$

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f sans faire le calcul de l'intégrale.

- (1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que f est impaire.
- (3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra remarquer que $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ où Φ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

- (4) En utilisant une expression conjuguée, montrer que $f'(x)$ est du même signe que $1 - x^4$.
- (5) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- (6) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}.$$

- (7) En déduire la limite de f en $+\infty$.
- (8) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
- (9) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en $(0,0)$ et déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente. Préciser la nature du point $(0,0)$ pour la courbe de f .
- (10) Tracer l'allure du graphe de f .

Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ est le DL de $\frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$ en $x=0$ à l'ordre 4 $\Rightarrow \int_0^x P(t)dt$ est le DL de $f(x)$ en $x=0$ à l'ordre 5.

Exercice 5.16. On considère $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ sur $[0,1]$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (1) Montrer que pour toute fonction en escalier ψ sur $[0,1]$ telle que, $\forall x \in [0,1]$, on a $\psi(x) \geq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors

$$\int_0^1 \psi(x) dx \geq 1.$$

Indication : on introduira une subdivision adaptée à ψ et on utilisera la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

- (2) Montrer que pour toute fonction en escalier φ sur $[0,1]$ telle que, $\forall x \in [0,1]$, on a $\varphi(x) \leq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \leq 0.$$

- (3) En déduire que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemman intégrable sur $[0,1]$.



