

Exercice 5.17 (Lemme de Riemman-Lebesgue). Soit $-\infty < a < b < +\infty$.

- (1) On considère φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_a^b \varphi(x) \sin(nx) dx$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (2) Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\epsilon > 0$. On pose $v_n = \int_a^b \psi(x) \sin(nx) dx$, $n \geq 0$.
 - (a) Justifier qu'il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon.$$
 - (b) En utilisant la question (1), en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2. a. $\forall \epsilon > 0, \exists \varphi_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier tq $|\varphi_c(x) - \psi(x)| \leq \epsilon$

On veut, $\forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$ tq $|x - y| < \delta_x \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$.
 $y \in [a, b]$
 Pour ϵ fixé.

On pose donc $I_x =]x - \delta_x, x + \delta_x[\cap [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$.

On a : $[a, b] = \bigcup_{x \in [a, b]} I_x$. Puisque $[a, b]$ est compact, on déduit qu'il suff. d'un nombre fini d' I_x pour couvrir $[a, b]$.

$\Rightarrow [a, b] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{x_i}$, $x_i \in [a, b]$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

On pose $J_1 = I_{x_1}$, $J_2 = I_{x_2} \setminus J_1$, $J_3 = I_{x_3} \setminus (J_1 \cup J_2)$

Donc $J_i = I_{x_i} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} J_k$. Donc, on a que : $\bigcup J_i = [a, b]$; $\cap J_i = \emptyset$.

On définit $\varphi_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier telle que :

$$\varphi_c(J_i) = \psi(x_i) \Rightarrow |\varphi_c(x) - \psi(x)| < \epsilon.$$

$$\textcircled{2}. \left| \int_a^b \psi(t) \sin(tx) dt \right| \leq \left| \int_a^b (\psi(t) - \varphi_c(t)) \sin(tx) dt \right| + \left| \int_a^b \varphi_c(t) \sin(tx) dt \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b \psi(t) \sin(tx) dt \right| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b \epsilon \sin(tx) dt \right| \leq \int_a^b \epsilon dt \leq \epsilon(b-a)$$

$\downarrow \rightarrow 0$
 $x \rightarrow +\infty$

comme ϵ fixé, c'est ok.

Exercice 5.19. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(t+a) dt \sim$$

