

6.1. Formules de Taylor.

Exercice 6.1. (1) En appliquant la formule de Taylor – Lagrange à la fonction e^x , montrer que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

(2) Pour $a > 0$ fixé, on considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{a^n}{n!}$. En considérant u_{n+1}/u_n , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

(4) Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle en 0 à l'ordre $n \geq 1$ et en déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

$$1. \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{e^a}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, $c \in [0, x] \cup [x, 0]$. On prend $a=0$. car $c \leq |x|$.

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \Rightarrow \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^c \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

$$2. \quad u_n = \frac{a^n}{n!} \text{ pour } a > 0. \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}.$$

On remarque que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$ $n \geq 2a$.

$$\Rightarrow 0 < u_{n+k} = \frac{1}{2^k} u_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \Rightarrow e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \downarrow 0.$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{e^a}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Exercice 6.2. (1) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ en 0 à la fonction $\ln(1+x)$.

(2) En déduire une valeur approchée de $\ln(1,1)$ à 10^{-5} près.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ln^{(n+1)}(c), \quad c \in [a, x] \cup [x, a],$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^{n+1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

$$\ln^{(k)}(x+1) = (-1)^{k+1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^{n+1} (1+x)^{-(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n+1} (-1)^{n+1} (x+1)^{-(n+1)}$$

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} - \frac{(-x)^{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \left| \ln(1+x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n(1+x)^{n+1}}$$

$$x \in [0, 0,1]. \Rightarrow \left| \ln(1,1) + \sum_{k=1}^n \frac{(-\frac{1}{10})^k}{k} \right| = \frac{1}{n(1,5)^{n+1}} < \frac{1}{n \cdot 10^{n+1}}$$

$$n=4. \Rightarrow \left| \ln(1,1) - \frac{1}{10} + \frac{1}{200} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{40000} \right| < \frac{1}{4 \cdot 10^5}$$

